

Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды ұлттық зерттеу университеті

ӘҰЖ 517.95

Қолжазба құқығында

## **МАНАТ АЛУА МАНАТҚЫЗЫ**

**Псевдопараболалық теңдеулер үшін шеттік есептерді зерттеу және олардың қолданулары**

8D05401 – Математика

Философия докторы (PhD)  
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Ғылыми кеңесшілері  
физика-математика ғылымдарының кандидаты,  
қауымдастырылған профессор  
Орумбаева Н.Т.

физика-математика ғылымдарының докторы,  
профессор  
Псху А.В.

Қазақстан Республикасы  
Қарағанды, 2026

## МАЗМҰНЫ

<b>КІРІСПЕ</b> .....	3
<b>1 ҮШІНШІ РЕТТІ СЫЗЫҚТЫҚ ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН БЕЙЛОКАЛ ШЕТТІК ЕСЕПТЕР</b> .....	18
1.1 Сызықтық псевдопараболалық теңдеу үшін бейлокал шеттік есептің қойылымы.....	18
1.2 Бейлокал шеттік есептің шешімін табу алгоритмдерінің жинақтылық шарттары.....	24
1.3 Псевдопараболалық теңдеудің бір класы үшін бейлокал шеттік есептің шешімділігі.....	35
<b>2 ҮШІНШІ РЕТТІ СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН БЕЙЛОКАЛ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІЛУІ</b> .....	40
2.1 Сызықтық емес псевдопараболалық теңдеу үшін бейлокал шеттік есептің қойылымы.....	40
2.2 Сызықтық емес псевдопараболалық теңдеу үшін бейлокал шеттік есептің «оқшауланған» шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары....	45
<b>3 ҰСЫНЫЛҒАН АЛГОРИТМДЕРДІҢ СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ТОЛҚЫНДЫҚ МОДЕЛЬДЕР ҮШІН ҚОЛДАНЫЛУЫ</b> .....	59
3.1 Бенджамин-Бона-Махони-Бюргерс теңдеуі үшін бейлокал шеттік есеп.....	59
3.2 Бенджамин-Бона-Махони теңдеуі үшін бейлокал шеттік есеп.....	75
<b>ҚОРЫТЫНДЫ</b> .....	83
<b>ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ</b> .....	85

## КІРІСПЕ

**Жұмыстың жалпы сипаттамасы.** Диссертациялық жұмыс үшінші ретті сызықтық және сызықтық емес псевдопараболалық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептерді зерттеуге арналған.

Әртүрлі үдерістерді және құбылыстарды сипаттауда жоғарғы ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің алатын орны ерекше. Мысалы, кеуекті ортадағы сұйықтықты сүзу, гетерогенді ортадағы жылу алмасу және топырақтағы ылғал алмасу мәселелері үшінші ретті гиперболалық дербес дифференциалдық теңдеулер болып табылатын модификацияланған диффузия теңдеулеріне әкеледі [1-5]. Псевдопараболалық теңдеулерге арналған бейлокал шарттары бар шеттік есептерді теориялық түрде зерттеу олардың ғылым мен техниканың күрделі мәселелерін шешуде қолданысына байланысты дамыды. Бейлокал шарттары бар псевдопараболалық теңдеулерге арналған шеттік есептерді шешудің алғашқы нәтижелерінің бірі ретінде С.Л. Соболев [6], J.R. Cannon [7] және Л.А.Камыниннің [8] жұмыстарын айта аламыз. Зерттеудің әрі қарай дамуына А.М. Нахушев [9], В.А. Водахова [10, 11], А.И. Кожанов [12-16], В.З. Канчукоев [17], Л.С. Пулькина [18], В.И. Жегалов, Е.А. Уткина [19, 20], Н.С. Попов [21], Б.С.Аблабеков [22], К.Г. Кожобеков [23], Cao Yin J., Jin Ch. [24], Н.К. Аркабаев [25], А.С. Сопуев [26], У.Д. Молдоярлов [27], Х.Г. Умаров [28] және т.б. ғалымдар үлес қосқан.

Бейлокал шеттік шарттары бар псевдопараболалық теңдеулерді шешудің жуық әдістері есептеу техникасының дамуына орай кейінгі жылдары зерттеушілердің назарын өзіне аударды. W. Ford, T. Ting және R. Ewing жариялаған [29, 30] мақалаларын псевдопараболалық теңдеулерді шешудің сандық әдісінің теориясының негізін қалаған жұмыстардың бірі деп атап айтуға болады. Интегралдық шарттары бар бір өлшемді сызықты емес псевдопараболалық теңдеулерді шешудің жуық әдістері [31, 32] әдебиеттерде қарастырылған. Әртүрлі интегралдық шарттары бар сызықтық псевдопараболалық теңдеулер үшін ақырлы-айырымдық сұлбалары [33-39] жұмыстарында зерттелді. Сондықтан осы диссертациялық жұмыста бейлокал шеттік шарттары бар үшінші ретті аралас туындылы сызықтық және сызықтық емес псевдопараболалық теңдеулерді шешудің тиімді тәсілі ретінде параметрлеу әдісі қарастырылып, оның көмегімен қойылған есептердің шешімінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденіп, жуық шешімдерін табу алгоритмдері ұсынылады.

**Тақырыптың қазіргі жағдайы және өзектілігі.** Соңғы жылдары псевдопараболалық теңдеулерді шешудің әртүрлі аналитикалық және жуық әдістері белсенді түрде зерттелуде. Бұл теңдеулердің өзектілігі олардың физикалық, техникалық және инженерлік үдерістерді математикалық модельдеуде кеңінен қолданылуымен тікелей байланысты. Псевдопараболалық теңдеулер күрделі ортадағы жылу алмасу, фильтрациялық үдерістер, деформацияланған денелер динамикасы, биологиялық көбею немесе миграция модельдері сияқты нақты қолданбалы есептерді сипаттауда тиімді болып

табылады. Яғни мұндай теңдеулерді шешудің тиімді аналитикалық және жуық әдістерін әзірлеу мен жетілдіру тек теориялық тұрғыдан ғана емес, практикалық қолданбалар үшін де ерекше маңызды болып саналады.

М. Пташнюк гетерогендік ортада (мысалы, кеуекті немесе биологиялық материалдар) псевдопараболалық теңдеулердің қолданысына көпсалалы талдау жүргізген [40-43].

М. J. Huntul, К. Khompysh ғалымдарының [44-46] жұмыстарында бейлокал интегралдық бақылаулардан үшінші ретті псевдопараболалық теңдеудегі уақытқа тәуелді потенциалды және күш коэффициенттерін қалпына келтірудің кері есебін қарастырды. Шешімнің бар болуы мен бірегейлігі кішігірім уақыт интервалындағы қысқарту принципі арқылы дәлелденеді. Бұл MATLAB ішкі бағдарламасы `lsqnonlin` құралының көмегімен сандық түрде шешілген.

J. Zhou жұмысында [47] квазисызықтық псевдопараболалық теңдеу егжей-тегжейлі қарастырылған. Бұл жұмыста алдыңғы зерттеулерді толықтыру, кеңейту ретінде шешімнің бастапқы критикалық энергиямен бұзылуы дәлелденді.

A. Jhangeer, F. Ibraheem ғалымдарының жұмыстарының бірінде сызықтық емес псевдопараболалық Осколков-Бенджамина-Бона-Махони-Бюргерс теңдеуі қарастырылған. Бұл теңдеу оптикалық талшық, топырақтың консолидациясы, термодинамика, сызықтық емес желілер, толқынның таралуы және тау жыныстарындағы сұйықтың ағыны сияқты облыстарда кеңінен қолданылады [48].

J. Yu, J. Zhang-тың [49] жұмысында конустық ерекшелігі бар көпбейнеде бейлокал көзі бар жартылай сызықтық псевдопараболалық теңдеу үшін бастапқы шеттік есеп қарастырылған. Авторлар мұндай теңдеулердің шешімдерінің тұрақтылығы мен бар болу шарттарын зерттеп, сандық алгоритмдер арқылы жуық шешімдерін ұсынған.

[50] жұмыста дербес туындылы үшінші ретті псевдопараболалық теңдеу үшін жаңа сандық әдіс ұсынылған. Ұсынылған әдіс дәстүрлі В-сплайн әдістерімен салыстырғанда үлкен икемділік пен дәлдікті көрсетеді.

Д.С. Джумабаевтың [51] мақаласында бірінші ретті сызықтық қарапайым дифференциалдық теңдеу үшін екі нүктелі шеттік есебінің шешімінің бар болуы параметрлеу әдісімен зерттелген. Бұл есептің бірімәнді шешімділігі мен  $Q_v(h)$  матрицасының кері матрицасының бар болуы арасындағы өзара байланыс орнатылған.  $Q_v(h)$  матрицасының кері матрицасын табатын рекурренттік формулалар негізінде берілген есептің бірімәнді шешімділігінің қажетті және жеткілікті шарты алынған.

Кейін параметрлеу әдісі екі нүктелі бейсызықты қарапайым дифференциалдық теңдеулерге [52], екі нүктелі интегралды-дифференциалдық теңдеулерге [53] қолданылған.

Параметрлеу әдісінің модификациясы ретінде А.Т. Асанова, М.Н. Оспанов, С.М. Темешева, Н.Т. Орумбаеваның еңбектерінде [54-61] функционалдық параметр енгізу әдісін атауға болады. Бұл әдіс екі тәуелсіз

айнымалысы бар, аралас туындысы кездесетін гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есептерді зерттеуде қолданыс табады.

А.Б. Кельдибекованың [62-65] жұмыстарында жартылай периодты шеттік шарттары бар үшінші ретті псевдопараболалық теңдеулерді параметрлеу әдісі көмегімен зерттелген.

Т.Д. Токмагамбетованың [66-69] жұмыстарында әртүрлі дербес бейлокал шарттары бар сызықтық үшінші және төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді шешу жолдары ұсынылған.

Бұл жұмыста параметрлеу әдісі арқылы үшінші ретті сызықтық және сызықтық емес псевдопараболалық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептердің шешімділігі және жинақтылық шарттары алынды.

Осылайша, диссертация теориялық математикамен қатар, күрделі физикалық-биологиялық үдерістерді модельдеуге жаңа көзқарас енгізу арқылы қолданбалы ғылымдардың да дамуына үлесін қосады.

### **Жұмыстың негізгі мақсаты және ғылыми жаңалығы.**

**Зерттеудің негізгі мақсаты** үшінші ретті аралас туындылы сызықтық және сызықтық емес псевдопараболалық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептерді шешу және шешімдерін табудың конструктивті алгоритмдерін құру болып табылады.

### **Зерттеу міндеттері:**

1. Үшінші ретті аралас туындылы сызықтық псевдопараболалық теңдеу үшін бейлокал шеттік шарттары бар есептің шешімін табу алгоритмін құру және бастапқы берілгендер терминдерінде олардың жинақтылық шарттарын алу.

2. Сызықтық псевдопараболалық теңдеудің бір класы үшін бейлокал шеттік есептің бірімәнді шешімділігін зерттеу.

3. Үшінші ретті сызықтық псевдопараболалық теңдеу үшін бейлокал шеттік есептің шешімін табу алгоритмінің негізінде сызықтық емес псевдопараболалық теңдеу үшін бейлокал шеттік есептің «оқшауланған» шешімінің бар болу шарттарын алу.

4. Ұсынылған алгоритмді Бенджамин-Бона-Махони және Бенджамин-Бона-Махони-Бюргерс сызықтық емес теңдеулері үшін қолдану және шешімінің бар болуының қажетті шарттарын алу.

**Зерттеу нысаны:** үшінші ретті псевдопараболалық теңдеу үшін шеттік есептер.

**Зерттеу пәні:** үшінші ретті сызықтық және сызықтық емес псевдопараболалық теңдеулер үшін бейлокал шарттары бар шеттік есептер, олардың шешімдерін табу алгоритмдері, құрылған алгоритмнің жинақтылық шарттары, шешімнің жалғыздығы.

**Зерттеу әдістемесі** функционалдық талдау әдістері, шеттік есептер теориясы және параметрлеу әдістеріне негізделген. Жұмыста бағалаулар және операторлар теориясы элементтері қолданылады.

**Ғылыми жаңалығы.** Үшінші ретті сызықтық және сызықтық емес псевдопараболалық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептер зерттеліп, келесі нәтижелер алынды:

1. Үшінші ретті аралас туындылы сызықтық псевдопараболалық теңдеу үшін бейлокал шеттік шарттары бар есептің шешімін табу алгоритмі құрылды және бастапқы берілгендер терминдерінде олардың жинақтылық шарттары алынды.

2. Сызықтық псевдопараболалық теңдеудің бір класы үшін бейлокал шеттік есептің бірімді шешімділігі зерттелді.

3. Үшінші ретті сызықтық псевдопараболалық теңдеу үшін бейлокал шеттік есепті шешу алгоритмі негізінде үшінші ретті сызықтық емес псевдопараболалық теңдеу үшін бейлокал шеттік есептің «оқшауланған» шешімінің бар болу шарттары алынды.

4. Ұсынылған алгоритм Бенджамин-Бона-Махони және Бенджамин-Бона-Махони-Бюргерс сызықтық емес теңдеулері үшін қолданылды және шешімдерінің жинақтылық шарттары алынды.

**Зерттеу жұмысының теориялық және практикалық маңызыдылығы.** Жұмыс барысында алынған нәтижелер теориялық сипатқа ие және үшінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептерді шешудің алгоритмін құруда, сондай-ақ, жоғарғы оқу орындарында математика бойынша арнайы курстарды оқытуда қолданылуы мүмкін.

**Қорғауға шығарылатын негізгі нәтижелер:**

1. Үшінші ретті сызықтық псевдопараболалық теңдеу үшін бейлокал шеттік есепті шешу алгоритмі және оның жинақтылық шарттары.

2. Үшінші ретті сызықтық псевдопараболалық теңдеудің бір класы үшін бейлокал шеттік есептің бірімді шешімділігі.

3. Үшінші ретті сызықтық псевдопараболалық теңдеу үшін бейлокал шеттік есепті шешу алгоритмі негізінде үшінші ретті сызықтық емес псевдопараболалық теңдеу үшін бейлокал шеттік есептің «оқшауланған» шешімінің бар болу шарттары.

4. Ұсынылған алгоритмнің Бенджамин-Бона-Махони және Бенджамин-Бона-Махони-Бюргерс сызықтық емес теңдеулері үшін қолданылуы және шешімдерінің жинақтылық шарттары.

**Сенімділік және негізділік.** Жұмыста қолданылған әдістердің конструктивтілігі зерттеудің сенімділігі мен негізділігін қамтамасыз етеді. Жалпы тұжырымдар теоремалар түрінде құрылған және олардың дәлелдеулері берілген.

**Жұмысты апробациялау.** Диссертацияның негізгі нәтижелері келесі конференциялар мен семинарларда дәлелденді және талқыланды:

1. «Қазіргі математиканың даму тенденциясы және оны білім беруді цифрландыру жағдайында оқыту» халықаралық ғылыми-практикалық конференциясы (Шымкент: академик Ә. Қуатбеков атындағы Халықтар достығы университеті, 2023 – 27-28 сәуір).

2. Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (Алматы: ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, 2023 – 5-7 сәуір).

3. Қазақ КСР ҒА корреспондент-мүшесі, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Т.Б. Амановтың туғанына 100 жыл

толуына арналған «Анализ, дифференциальные уравнения и их приложения» халықаралық ғылыми-практикалық конференциясы (Астана, 2023 – 22-23 маусым).

4. VII Түркі әлемі математиктерінің дүниежүзілік конгресі (Түркістан, 2023 – 20-23 қыркүйек).

5. Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (Алматы: ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, 2024 – 16-19 сәуір).

6. Академик Т.Д. Джураевтің туғанына 90 жыл толуына арналған «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» атты халықаралық ғылыми конференциясы (Ташкент: Мирзо Улугбек атындағы Өзбекстан Ұлттық университеті, қаласы, 2024 – 24-26 қазан).

7. «Actual problems of applied mathematics and information technologies – Al-Khwarizmi 2024» халықаралық ғылыми конференциясы (Ташкент: Мирзо Улугбек атындағы Өзбекстан Ұлттық университеті, қаласы, 2024 – 22-23 қазан).

8. Evolution Equations, Approximation and Spectral Optimization: халықаралық жазғы мектеп және конференциясы (Алматы: ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, қаласы, 2024 – 11-18 қыркүйек).

9. Академик Е.А. Бөкетовтың 100 жылдығына орай ұйымдастырылған «Пәнаралық ғылыми зерттеулердің өзекті мәселелері» атты халықаралық ғылыми конференциясы (Қарағанды: Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, 2025 – 17-20 маусым).

**Жарияланымдар.** Диссертацияның негізгі нәтижелері 13 ғылыми мақала мен халықаралық конференциялар материалдарында [70-82] жарияланды, оның ішінде, 2 мақала Scopus (процентиль 53) базасына енетін басылымда, 1 мақала Web of Science (SCIE, Q2) базасына енетін басылымда, 1 мақала уәкілетті орган ұсынған басылымда жарияланды.

**Диссертация құрылымы.** 92 беттік диссертациялық жұмыс келесі құрылымдық элементтерден тұрады: кіріспе, үш бөлім, қорытынды, пайдаланылған әдебиеттер тізімі.

**Жұмыстың қысқаша мазмұны.** Бірінші бөлімде үшінші ретті сызықтық псевдопараболалық теңдеу үшін бейлокал шеттік есеп қарастырылады. Бұл есеп интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін бейлокал шеттік есепке келтіріледі. Әрі қарай параметрлеу әдісінің көмегімен шешімін табу алгоритмі құрылады, алгоритмнің жинақтылық шарттары және дәл мән мен жуық мәннің арасындағы бағалаулар алынды.

1.1-ішкі бөлімде үшінші ретті аралас туындылы псевдопараболалық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептің шешімін табу алгоритмі ұсынылады, яғни  $\Omega = [0, \omega] \times [0, T]$  облысында келесі есеп қарастырылады:

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = a_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a_3 u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$b_1 \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 u(x, T)}{\partial x^2} + b_3 \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} + b_4 \frac{\partial u(x, T)}{\partial t} + b_5 u(x, 0) + b_6 u(x, T) = \theta(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (4)$$

мұнда  $a_i, b_j - const$ ,  $i = \overline{1,3}$ ,  $j = \overline{1,6}$ ,  $\theta(x)$  функциялары  $[0, \omega]$  аралығында үзіліссіз және  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  функциялары  $[0, T]$  аралығында үзіліссіз дифференциалданады.

(1)-(4) есебінің шешімін табу үшін  $w(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$  функциясын енгіземіз, сонда

$$u(x, t) = \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi w(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi,$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \varphi'(t) + \psi'(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial w(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi,$$

демек, (1)-(4) есебін келесі түрде жазуға болады:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = a_1 w(x, t) + a_2 \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial w(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi + \\ + a_3 \int_0^x \int_0^\xi w(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + \tilde{f}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} b_1 w(x, 0) + b_2 w(x, T) + b_3 \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial w(\xi_1, 0)}{\partial t} d\xi_1 d\xi + b_4 \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial w(\xi_1, T)}{\partial t} d\xi_1 d\xi + \\ + b_5 \int_0^x \int_0^\xi w(\xi_1, 0) d\xi_1 d\xi + b_6 \int_0^x \int_0^\xi w(\xi_1, T) d\xi_1 d\xi = \tilde{\theta}(x), \quad x \in [0, \omega], \end{aligned} \quad (6)$$

мұнда

$$\tilde{f}(x, t) = f(x, t) + a_2 \varphi'(t) + a_2 \psi'(t)x + a_3 [\varphi(t) + \psi(t)x],$$

$$\tilde{\theta}(x) = \theta(x) + b_3 [\varphi'(0) + \psi'(0)x] + b_4 [\varphi'(T) + \psi'(T)x] +$$

$$+ b_5 [\varphi(0) + \psi(0)x] + b_6 [\varphi(T) + \psi(T)x].$$

Бұдан кейін (5)-(6) есебінің шешімін табу үшін параметрлеу әдісін [51, с. 50-65] қолданамыз.  $h > 0$ :  $Nh = T$  қадамы бойынша  $[0, T] = \cup_{r=1}^N [(r -$

1)  $h, rh$ ),  $N = 1, 2, \dots$  бөліктеуін жүргіземіз. Бұл жағдайда  $\Omega$  облысы  $N$  бөлікке бөлінеді.  $w_r(x, t)$  арқылы  $w(x, t)$  функциясының  $\Omega_r = [0, \omega] \times [(r-1)h, rh)$ ,  $r = \overline{1, N}$ , облысындағы мәнін белгілейміз.

Әрі қарай (5), (6) есебінде  $\lambda_r(x) = w_r(x, (r-1)h)$  белгілеуін енгізіп,  $\tilde{w}_r(x, t) = w_r(x, t) - \lambda_r(x)$ ,  $r = \overline{1, N}$  алмастыруын жасаймыз. Сонда  $\lambda_r(x)$  белгісіз функциялары бар пара-пар шеттік есебін аламыз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}_r(x, t)}{\partial t} &= a_1 \tilde{w}_r(x, t) + a_1 \lambda_r(x) + a_2 \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi + \\ &+ a_3 \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_r(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + a_3 \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r(\xi_1) d\xi_1 d\xi + \tilde{f}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_r, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\tilde{w}_r(x, (r-1)h) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad (8)$$

$$\begin{aligned} b_1 \lambda_1(x) + b_2 \lambda_N(x) + b_2 \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{w}_N(x, t) + b_3 \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_1(\xi_1, 0)}{\partial t} d\xi_1 d\xi + \\ + b_4 \int_0^x \int_0^\xi \lim_{t \rightarrow T-0} \frac{\partial \tilde{w}_N(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi + b_5 \int_0^x \int_0^\xi \lambda_1(\xi_1) d\xi_1 d\xi + \\ + b_6 \int_0^x \int_0^\xi \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{w}_N(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + b_6 \int_0^x \int_0^\xi \lambda_N(\xi_1) d\xi_1 d\xi = \tilde{\theta}(x), \quad x \in [0, \omega], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\lambda_s(x) + \lim_{t \rightarrow sh-0} \tilde{w}_s(x, t) = \lambda_{s+1}(x), \quad x \in [0, \omega], \quad s = \overline{1, N-1}, \quad (10)$$

мұнда (10) – бөліктеудің ішкі сызықтарындағы функцияның үзіліссіздік шарты.

(7), (8) есебі  $\lambda_r(x)$ -тің бекітілген мәндерінде бірпараметрлі Коши есебінің үйірі болады, мұндағы  $x \in [0, \omega]$ , және келесі интегралдық теңдеуге пара-пар:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_r(x, t) &= a_1 \int_{(r-1)h}^t \tilde{w}_r(x, \tau) d\tau + a_1 [t - (r-1)h] \lambda_r(x) + \\ &+ a_2 \int_{(r-1)h}^t \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}(\xi_1, \tau)}{\partial \tau} d\xi_1 d\xi d\tau + a_3 \int_{(r-1)h}^t \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_r(\xi_1, \tau) d\xi_1 d\xi d\tau + \\ &+ a_3 [t - (r-1)h] \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r(\xi_1) d\xi_1 d\xi + \int_{(r-1)h}^t \tilde{f}(x, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

(11)-де  $t \rightarrow rh - 0$  ұмтылғанда шекке көшіп, (9), (10)-ға  $\lim_{t \rightarrow Nh-0} \tilde{w}_N(x, t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow sh-0} \tilde{w}_s(x, t)$  орнына оған сәйкес  $\lambda_r(x)$ ,  $r = \overline{1, N}$ , белгісіз функцияларына арналған

оң жақ бөліктерін қойып және (9) теңдеуінің екі жағын да  $h > 0$  көбейту арқылы келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$Q(x, h)\lambda(x) + S(x, h) \int_0^x \int_0^\xi \lambda(\xi_1) d\xi_1 d\xi = -W_1(x, h, \tilde{w}) - \\ -W_2\left(x, h, \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}(\xi_1, [t])}{\partial t} d\xi_1 d\xi\right) - W_3\left(x, h, \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}(\xi_1, [t]) d\xi_1 d\xi\right) - F(x, h), \quad (12)$$

мұнда  $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_N(x))'$ .

$\left\{ \frac{\partial \tilde{w}_r(x, t)}{\partial t}, \lambda_r(x), \tilde{w}_r(x, t) \right\}$ ,  $r = \overline{1, N}$ , функциялар үштігінен тұратын жүйенің шешімін табу үшін (7), (8) Коши есебі мен (12) және (11) теңдеулерінен тұратын тұйық жүйе аламыз. Тұйық жүйе көмегімен (7)-(10) шеттік есебінің шешімін табу алгоритмі құрылады.

1.2-ішкі бөлімде ұсынылған алгоритмінің жинақталу шарттары, шеттік есептің дәл және жуық шешімнің арасындағы бағалаулар алынады.

Келесі тұжырым ұсынылған алгоритмнің жүзеге асырылуын және жинақтылығын, сондай-ақ (7)-(10) есебінің бір мәнді шешімділігін қамтамасыз етеді.

*1-теорема.* Қандай да бір  $h > 0$ :  $Nh = T$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , қадамы үшін  $(N \times N)$  өлшемді  $Q(h)$  матрицасының кері матрицасы бар болсын және келесі шарттар орындалсын:

$$1) \| [Q(h)]^{-1} \| < \gamma(h), \quad 2) q(h) < 1$$

мұнда

$$q(h) = \max_{x \in [0, \omega]} \| q(x, h) \|, \quad q(x, h) = h\chi(x) + ha_2 \int_0^x \int_0^\xi e^{a_2 \frac{\xi_1^2}{2!}} \chi(\xi) d\xi,$$

$$\chi(x) = a_1 [1 + \beta(x)\delta(x)] + a_3 \left[ \frac{x^2}{2!} + \int_0^x \int_0^\xi \beta(\xi_1)\delta(\xi_1) d\xi_1 d\xi \right],$$

$$\beta(x) = h\gamma(h) \exp \left( h\gamma(h)\rho_0 \frac{x^2}{2!} + h\gamma(h)\rho_2 \int_0^x \int_0^\xi e^{a_2 \frac{\xi_1^2}{2!}} \left( a_1 + a_3 \frac{\xi_1^2}{2!} \right) d\xi_1 d\xi \right),$$

$$\delta(x) = a_1 \max\{hb_2, 1\} + \rho_2 a_1 \int_0^x \int_0^\xi \frac{\xi_1^2}{2!} e^{a_2 \frac{\xi_1^2}{2!}} d\xi_1 d\xi + \rho_2 a_3 \int_0^x \int_0^\xi \frac{\xi_1^2}{2!} e^{a_2 \frac{\xi_1^2}{2!}} d\xi_1 d\xi + \rho_3 \frac{x^2}{2!},$$

$$\rho_0 = b_5 + b_6 + a_3 \max\{hb_2, 1\}, \quad \rho_1 = a_1 \max\{hb_2, 1\},$$

$$\rho_2 = b_3 + b_4 + a_2 \max\{hb_2, 1\}, \quad \rho_3 = b_6 + a_3 \max\{hb_2, 1\}.$$

Онда (7)-(10) есебінің жалғыз шешімі  $\{\tilde{w}^*(x, [t]), \lambda^*(x)\}$  бар және келесі бағалаулар орындалады:

$$\begin{aligned} & \text{а) } \|\tilde{w}^* - \tilde{w}^{(k)}\|_1 \leq \\ & \leq h \sum_{j=k+1}^{\infty} [q(h)]^j \max_{x \in [0, \omega]} \|q_0(x)\| \max \left\{ \max_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{\theta}(x)\|, \max_{(x,t) \in \Omega} \|\tilde{f}(x, t)\| \right\}; \\ & \text{ә) } \|\lambda^* - \lambda^{(k)}\|_2 \leq \\ & \leq \max_{x \in [0, \omega]} \|\beta(x)\delta(x)\| h \sum_{j=k}^{\infty} [q(h)]^j \max_{x \in [0, \omega]} \|q_0(x)\| \max \left\{ \max_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{\theta}(x)\|, \max_{(x,t) \in \Omega} \|\tilde{f}(x, t)\| \right\}, \end{aligned}$$

мұнда

$$q_0(x) = a_1 \beta(x) \delta_0(x) + a_2 \int_0^x \int_0^{\xi} e^{a_2 \frac{\xi^2}{2}} \chi_0(\xi) d\xi + a_3 \int_0^x \int_0^{\xi} \beta(\xi_1) \delta_0(\xi_1) d\xi_1 d\xi,$$

$$\chi_0(x) = a_1 \beta(x) \delta_0(x) + a_3 \int_0^x \int_0^{\xi} \beta(\xi_1) \delta_0(\xi_1) d\xi_1 d\xi + 1,$$

$$\delta_0(x) = \rho_2 \int_0^x \int_0^{\xi} e^{a_2 \frac{\xi_1^2}{2}} d\xi_1 d\xi + h + h \max\{hb_2, 1\}.$$

(1)-(4) және (7)-(10) есептерінің пара-парлығынан және 1-теоремадан келесі теорема орынды.

*2-теорема.* 1-теореманың шарттары орындалсын. Онда (1)-(4) есебінің  $u^*(x, t)$  жалғыз шешімі бар және келесі бағалау орындалады:

$$\|u^* - u^{(k)}\|_1 \leq M(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|q_0(x)\| \max \left\{ \max_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{\theta}(x)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\tilde{f}(x, t)\| \right\},$$

мұнда  $M(h) = h \sum_{j=k+1}^{\infty} [q(h)]^j [1 + \max_{x \in [0, \omega]} \|\beta(x)\delta(x)\|]$ .

1.3-ішкі бөлімде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} &= a_1(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + a_2(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} + \\ &+ a_3(x, t) u(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega = [0, \omega] \times [0, T], \end{aligned}$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \psi(t) \quad t \in [0, T],$$

$$b_1 \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 u(x, T)}{\partial x^2} + b_3 \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x \partial t} +$$

$$+b_4 \frac{\partial^2 u(x, T)}{\partial x \partial t} + b_5 u(x, 0) + b_6 u(x, T) = \theta(x), \quad x \in [0, \omega]$$

есепі қарастырылған. Бұл жұмыстың нәтижелері [74, р. 11811-11823] мақаласында жарияланған. Бұл есепте де жуық шешімді табу алгоритмі ұсынылып, ұсынылған алгоритмнің жинақтылық шарттары алынған, сондай-ақ, жуық және дәл шешімнің арасындағы бағалаулар орнатылады.

Екінші бөлімде үшінші ретті сызықтық емес псевдопараболалық теңдеулер үшін бейлокал шартты шеттік есептердің шешімділігі зерттелген. Параметрлеу әдісінің көмегімен алгоритмнің жинақтылық шарттары, сонымен бірге, сызықтық емес теңдеудің шешімнің бар және оқшауланғандығын қамтамасыз ететін бағалаулар алынады.

2.1-ішкі бөлімде  $\Omega = [0, \omega] \times [0, T]$  облысында келесі сызықтық емес бейлокал шеттік есеп қарастырылады:

$$\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} = f\left(x, t, u(x, t), \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right), \quad (x, t) \in \Omega, \quad u \in R, \quad (13)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad t \in [0, T], \quad (14)$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (15)$$

$$b_1 \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 u(x, T)}{\partial x^2} + b_3 \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} + b_4 \frac{\partial u(x, T)}{\partial t} + b_5 u(x, 0) + b_6 u(x, T) = \theta(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (16)$$

мұнда  $f: \Omega \times R \times R \times R \rightarrow R$  үзіліссіз,  $\theta(x)$ ,  $b_j(x)$ ,  $j = \overline{1, 6}$  функциялары  $[0, \omega]$  аралығында үзіліссіз,  $\varphi(t), \psi(t)$  функциялары  $[0, T]$  аралығында үзіліссіз дифференциалданады,  $b_j(x) - const$ ,  $j = \overline{1, 6}$ .

(13)-(16) есебінің шешімін табу үшін жаңа  $w(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$  функциясын енгіземіз, сонда

$$u(x, t) = \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi w(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi,$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \varphi'(t) + \psi'(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial w(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi$$

тең болады. Осыдан (13)-(16) есебін келесі түрде жазамыз:

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = f \left( x, t, \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi w(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi, \right. \\ \left. \varphi'(t) + \psi'(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial w(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi, w(x, t) \right) \quad (17)$$

$$b_1 w(x, 0) + b_2 w(x, T) + b_3 \int_0^x \frac{\partial w(\xi, 0)}{\partial t} d\xi + b_4 \int_0^T \frac{\partial w(\xi, T)}{\partial \xi} d\xi + \\ + b_5 \int_0^x \int_0^\xi w(\xi_1, 0) d\xi_1 d\xi + b_6 \int_0^x \int_0^\xi w(\xi_1, T) d\xi_1 d\xi = \tilde{\theta}(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (18)$$

мұнда  $\tilde{\theta}(x) = \theta(x) + b_3(\varphi'(0) + \psi'(0)x) + b_4(\varphi'(T) + \psi'(T)x) + b_5(\varphi(0) + \psi(0)x) + b_6(\varphi(T) + \psi(T)x)$ .

$h > 0: Nh = T$  қадамы бойынша  $[0, T) = \bigcup_{r=1}^N [(r-1)h, rh)$ ,  $N = 1, 2, \dots$  бөліктеуін жүргіземіз. Бұл жағдайда  $\Omega$  облысы  $N$  бөлікке бөлінеді.  $w_r(x, t)$  арқылы  $w(x, t)$  функциясының  $\Omega_r = [0, \omega] \times [(r-1)h, rh)$ ,  $r = \overline{1, N}$  облысындағы мәнін белгілейміз. Сонда (17), (18) есебі келесі шеттік есепке пара-пара:

$$\frac{\partial w_r(x, t)}{\partial t} = f \left( x, t, \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi w_r(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi, \right. \\ \left. \varphi'(t) + \psi'(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial w_r(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi, w_r(x, t) \right) \quad (19)$$

$$b_1 w_1(x, 0) + b_2 \lim_{t \rightarrow T-0} w_N(x, t) + b_3 \int_0^x \frac{\partial w_1(\xi, 0)}{\partial t} d\xi + b_4 \lim_{t \rightarrow T-0} \int_0^x \frac{\partial w_N(\xi, t)}{\partial t} d\xi + \\ + b_5 \int_0^x \int_0^\xi w_1(\xi_1, 0) d\xi_1 d\xi + b_6 \int_0^x \int_0^\xi \lim_{t \rightarrow T-0} w_N(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi = \tilde{\theta}(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (20)$$

$$\lim_{t \rightarrow sh-0} w_s(x, t) = w_{s+1}(x, sh), \quad x \in [0, \omega], \quad s = \overline{1, N-1}, \quad (21)$$

мұнда (21) – бөліктеудің ішкі сызықтарындағы функцияның үзіліссіздік шарты. (19)-(21) есебінде

$$\lambda_r(x) = w_r(x, (r-1)h)$$

белгілеуін енгізіп:

$$\tilde{w}_r(x, t) = w_r(x, t) - \lambda_r(x), \quad r = \overline{1, N},$$

алмастыруын жасаймыз. Сонда  $\lambda_r(x)$  белгісіз функциялары бар келесі шеттік есебін аламыз:

$$\frac{\partial \tilde{w}_r(x, t)}{\partial t} = f \left( x, t, \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_r(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r(\xi_1) d\xi_1 d\xi, \right. \\ \left. \varphi'(t) + \psi'(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_r(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi, \tilde{w}_r(x, t) + \lambda_r(x) \right) \quad (22)$$

$$\tilde{w}_r(x, (r-1)h) = 0, \quad x \in [0, \omega] \quad (23)$$

$$b_1 \lambda_1(x) + b_2 \lambda_N(x) + b_2 \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{w}_N(x, t) + \\ + b_3 \int_0^x \frac{\partial \tilde{w}_1(\xi, 0)}{\partial t} d\xi + b_4 \lim_{t \rightarrow T-0} \int_0^x \frac{\partial \tilde{w}_N(\xi, t)}{\partial t} d\xi + b_5 \int_0^x \int_0^\xi \lambda_1(\xi_1) d\xi_1 d\xi + \\ + b_6 \int_0^x \int_0^\xi \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{w}_N(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + b_6 \int_0^x \int_0^\xi \lambda_N(\xi_1) d\xi_1 d\xi = \tilde{\theta}(x), \quad x \in [0, \omega] \quad (24)$$

$$\lambda_s(x) + \lim_{t \rightarrow sh-0} \tilde{w}_s(x, t) = \lambda_{s+1}(x), \quad x \in [0, \omega], \quad s = \overline{1, N-1}. \quad (25)$$

(22), (23) есебі  $\lambda_r(x)$ -тің бекітілген мәндерінде интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін бірпараметрлі Коши есебі болып табылады және келесі сызықтық емес интегралдық теңдеуге пара-пар:

$$\tilde{w}_r(x, t) = \int_{(r-1)h}^t f \left( x, \tau, \varphi(\tau) + \psi(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_r(\xi_1, \tau) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r(\xi_1) d\xi_1 d\xi, \right. \\ \left. \varphi'(\tau) + \psi'(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_r(\xi_1, \tau)}{\partial t} d\xi_1 d\xi, \tilde{w}_r(x, \tau) + \lambda_r(x) \right) d\tau. \quad (26)$$

(26)-теңдеуде  $t \rightarrow rh - 0$  ұмтылғанда шекке көшіп, (24), (25)-те  $\lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{w}_N(x, t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow sh-0} \tilde{w}_s(x, t)$  орнына оған сәйкес оң жақ бөліктерін қойып, (24) теңдеудің екі жағын да  $h > 0$  қадамына көбейтіп,  $\lambda_r(x)$ ,  $r = \overline{1, N}$ , белгісіз функцияларынан тәуелді келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$Q_h(x, \lambda(x), \tilde{w}(x, [\cdot])) = 0. \quad (27)$$

(22)-(25) есебінің бастапқы жуықтауы ретінде  $\tilde{w}^{(0)}(x, [t])$  функциясын алып, төмендегі алгоритм бойынша тізбекті жуықтауларды құрамыз:

1-қадам.  $\tilde{w}_r(x, t) = \tilde{w}_r^{(0)}(x, t)$  деп алып, (22) және (27) теңдеулері жүйесінен  $\frac{\partial \tilde{w}_r^{(1)}(x, t)}{\partial t}$ ,  $\lambda_r^{(1)}(x)$ ,  $r = \overline{1, N}$ , функцияларын табамыз. (26) интегралдық теңдеуден  $\tilde{w}_r^{(1)}(x, t)$  функциясы анықталады.

Үдерісті жалғастыра отырып,  $k$ -шы қадамда  $\left\{ \frac{\partial \tilde{w}_r^{(k)}(x, t)}{\partial t}, \lambda_r^{(k)}(x), \tilde{w}_r^{(k)}(x, t) \right\}$  функциялар үштігінен тұратын жүйе алынады.

Ұсынылған алгоритмнің жүзеге асырылуы, жинақтылығы және функционалдық параметрлері (22)–(25) теңдеулер жүйесіне сәйкес көпсіпатты шеттік есептің шешімінің бар болуының жеткілікті шарттар келесі теоремада келтірілген.

**3-теорема.** Барлық  $(x, \lambda(x), \tilde{w}(x, [\cdot]))$  үшін  $\frac{\partial Q_h(x, \lambda(x), \tilde{w}(x, [\cdot]))}{\partial \lambda}$  Якоби матрицасының кері матрицасы болатындай  $h > 0$ :  $Nh = T$ , ( $N = 1, 2, \dots$ ) қадамы,  $(\lambda^{(0)}(x), \tilde{w}_r^{(0)}(x, [t]), \phi_1, \phi_2) \in U(f, L_1, L_2, L_3, x, h)$  бар болсын, мұндағы  $x \in [0, \omega]$ ,  $\{\lambda(x), \tilde{w}(x, [t])\} \in S(\lambda^{(0)}(x), \phi_1) \times S(\tilde{w}_r^{(0)}(x, [t]), \phi_1 \phi_2)$  және келесі шарттар орындалсын:

- 1)  $\left\| \left[ \frac{\partial Q_h(x, \lambda(x), \tilde{w}(x, [\cdot]))}{\partial \lambda} \right]^{-1} \right\| \leq \tilde{\gamma}(h)$ ,
- 2)  $\tilde{q}(h) = h\mu \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_2^n \omega^{2n}}{2^{n-1}(n-1)!(2n-1)(2n)} \right) < 1$ ,
- 3)  $\frac{[h\tilde{\gamma}(h)]^2}{1-\tilde{q}(h)} \max_{x \in [0, \omega]} \|P(x)\| \max_{x \in [0, \omega]} \|P_0(x)\| \max_{x \in [0, \omega]} \|Q_h(x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot]))\| +$   
 $+ \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|Q_h(x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{w}^{(0)}(\bar{x}, [\cdot]))\| < \phi_1$ ,
- 4)  $\frac{h}{1-\tilde{q}(h)} \max_{x \in [0, \omega]} \|P_0(x)\| < \phi_2$ ,

мұнда  $\mu = e^{L_2 \frac{\omega^2}{2!}} \left( L_3 \frac{\omega^2}{2} + L_1 \right) \left( 1 + h\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|P(x)\| \right)$ ,

$$P_0(x) = \left( L_3 \frac{x^2}{2} + L_2 \int_0^x \int_0^\xi e^{L_2 \frac{\xi_1^2}{2}} \left( L_3 \frac{\xi_1^2}{2} + L_1 \right) d\xi_1 d\xi + L_1 \right),$$

$$P(x) = \left( P_1 + \tilde{P}_2(x) + P_3 \frac{x^2}{2!} \right) e^{h\tilde{\gamma}(h)\tilde{P}_2(x)},$$

$$P_1 = L_1 \max\{hb_2, 1\}, P_2 = L_3 \max\{hb_2, 1\} + hb_3 + hb_4,$$

$$P_3 = L_2 \max\{hb_2, 1\} + hb_5 + hb_6, \tilde{P}_2(x) = P_2 \int_0^x \int_0^\xi e^{\frac{L_2 \xi_1^2}{2}} \left( L_3 \frac{\xi_1^2}{2!} + L_1 \right) d\xi_1 d\xi.$$

Онда осы алгоритм арқылы анықталған  $\{\lambda^{(k)}(x), \tilde{w}_r^{(k)}(x, [t])\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , тізбегі  $S(\lambda^{(0)}(x), \phi_1) \times S(\tilde{w}_r^{(0)}(x, [t]), \phi_1 \phi_2)$  жиынында (22)-(25) есебінің шешімі

$(\lambda^*(x), \tilde{w}^*(x, [t]))$  функцияларына жинақталады және келесі бағалаулар орындалады:

$$\begin{aligned} & \text{a) } \|\lambda^* - \lambda^{(k+1)}\|_2 \leq \\ & \leq [h\tilde{\gamma}(h)]^2 \max_{x \in [0, \omega]} \|P_0(x)\| \max_{x \in [0, \omega]} \|P(x)\| \frac{[\tilde{q}(h)]^k}{1 - \tilde{q}(h)} \max_{x \in [0, \omega]} \|Q_h(x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot]))\|, \\ & \text{ә) } \|\tilde{w}^* - \tilde{w}^{(k+1)}\|_1 \leq \\ & \leq \frac{[\tilde{q}(h)]^{k+1}}{1 - \tilde{q}(h)} h\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|P_0(x)\| \max_{x \in [0, \omega]} \|Q_h(x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot]))\|. \end{aligned}$$

(13)-(16) және (22)-(25) есептерінің пара-парлығынан және 3-теоремадан келесі 4-теорема орындалады.

*4-теорема.* 3-теореманың шарттары орындалсын, онда  $\{u^{(k)}(x, t)\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , функциялар тізбегі  $S(u^{(0)}(x, t), \Phi(x))$  жиынына тиісті және (13)-(16) есебінің  $u^*(x, t)$  шешіміне  $S(u^{(0)}(x, t), \Phi(x))$  жиынында жинақталады және келесі бағалау орындалады:

$$\begin{aligned} & \|u^*(x, t) - u^{(k)}(x, t)\| \leq (h\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|p(x)\| + \\ & + \tilde{q}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|P_0(x)\| \frac{[\tilde{q}(h)]^{k+1}}{1 - \tilde{q}(h)} \max_{x \in [0, \omega]} \|Q_h(x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot]))\|), (x, t) \in \Omega. \end{aligned}$$

Сондай-ақ, (13)-(16) есебінің кез келген шешімі  $S(u^{(0)}(x, t), \Phi(x))$  жиынында оқшауланған.

Сызықтық емес үшінші ретті псевдопараболалық теңдеудің шешімін табу үшін ұсынылған алгоритмнің қолдану мысалы ретінде 3-бөлімде Бенджамин-Бона-Махони және Бенджамин-Бона-Махони-Бюргерс теңдеулерін шешу қарастырылады. Бұл теңдеулер әртүрлі физикалық ортада сызықтық емес толқындарды сипаттайтын математикалық модель болып табылады.

3.1-бөлімшеде Бенджамин-Бона-Махони-Бюргерс теңдеуі қарастырылады. Бенджамин-Бона-Махони-Бюргерс (ББМБ) теңдеуі Бюргерс теңдеуіне ұқсас тұтқырлық мүшесі қосылған Бенджамин-Бона-Махони теңдеуінің модификациясы болып табылады. Бенджамин-Бона-Махони-Бюргерс теңдеуінің әртүрлі типтері [83-92] жұмыстарында зерттелген. Бенджамин-Бона-Махони-Бюргерс теңдеулерін зерттеуге арналған көп жұмыстардың болуына қарамастан, оған деген қызығушылық әлі күнге дейін бәсеңдеген емес. Себебі Бенджамин-Бона-Махони-Бюргерс теңдеуі толқындар теориясы, математикалық физика және практикалық қолдану сияқты маңызды, қызықты салаларды біріктіретін зерттеу нысаны саналады.

3.2-ішкі бөлімде келтірілген Бенджамин-Бона-Махони (ББМ) теңдеуі аз амплитудалы ұзын беттік тартылыс толқындарын модельдеуге арналған Кортевег-де-Фриз (КдФ) теңдеуінің баламасы және алғаш рет 1972 жылы

Т. Бенджамин, Дж. Бона және Дж. Махони өз жұмыстарында [93] ұсынған. Кортевег-де-Фриз (КдФ) теңдеуінен айырмашылығы, БМ теңдеуі жақсы дисперсиялық қасиетке ие және сандық модельдеуде шешімнің тұрақтылығын қамтамасыз етеді. Бенджамин-Бона-Махони теңдеуі сұйықтағы, плазмадағы және басқа да ортадағы толқындардың таралуын сипаттайды [94-96]. Соңғы жылдары осы бағыттағы зерттеулер [97-102] еңбектерінде кеңінен қарастырылған.

Қорытындыда зерттеудің нәтижелері жинақталып, негізгі ғылыми қорытындылар келтірілген.

Автор есептің қойылуына және диссертацияның барлық кезеңдерінде берген құнды кеңестері мен көмектері үшін отандық ғылыми кеңесші физика-математика ғылымдарының кандидаты, қауымдастырылған профессор Орумбаева Нургул Тумарбековнаға шын жүректен алғысын білдіреді. Сонымен қатар, шетелдік ғылыми кеңесшісі физика-математика ғылымдарының докторы Псху Арсен Владимировичке бағалы кеңестері мен көрсетілген қолдауы үшін алғысын айтады.

# 1 ҮШІНШІ РЕТТІ СЫЗЫҚТЫҚ ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН БЕЙЛОКАЛ ШЕТТІК ЕСЕПТЕР

## 1.1 Сызықтық псевдопараболаалық теңдеу үшін бейлокал шеттік есептің қойылымы

$\Omega = [0, \omega] \times [0, T]$  облысында келесі шеттік есеп қарастырылады:

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = a_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a_3 u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \quad (1.1)$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.3)$$

$$b_1 \frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 u(x,T)}{\partial x^2} + b_3 \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} + b_4 \frac{\partial u(x,T)}{\partial t} + b_5 u(x,0) + b_6 u(x,T) = \theta(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (1.4)$$

мұнда  $a_i, b_j - const, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,6}$ ,  $\theta(x)$  функциялары  $[0, \omega]$  аралығында үзіліссіз және  $\varphi(t), \psi(t)$  функциялары  $[0, T]$  аралығында үзіліссіз дифференциалданады.

Егер барлық  $(x,t) \in \Omega$  үшін (1.1) теңдеуін және (1.2)-(1.4) шеттік шарттарын қанағаттандырса, онда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \in C(\Omega, R), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in C(\Omega, R), \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \in C(\Omega, R),$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \in C(\Omega, R), \quad \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \in C(\Omega, R)$$

дербес туындылары бар  $u(x,t) \in C(\Omega, R)$  функциясы (1.1)-(1.4) есебінің шешімі деп аталады.

(1.1)-(1.4) есебінің шешімін табу үшін жаңа  $w(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$  функциясын енгіземіз, сонда

$$u(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi w(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi,$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \varphi'(t) + \psi'(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial w(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi$$

тең болады, бұл жерде (1.1)-(1.4) есебін келесі түрде жазамыз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} &= a_1 w(x, t) + a_2 \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial w(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi + \\ &+ a_3 \int_0^x \int_0^\xi w(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + \tilde{f}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} b_1 w(x, 0) + b_2 w(x, T) + b_3 \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial w(\xi_1, 0)}{\partial t} d\xi_1 d\xi + b_4 \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial w(\xi_1, T)}{\partial t} d\xi_1 d\xi + \\ + b_5 \int_0^x \int_0^\xi w(\xi_1, 0) d\xi_1 d\xi + b_6 \int_0^x \int_0^\xi w(\xi_1, T) d\xi_1 d\xi = \tilde{\theta}(x), \quad x \in [0, \omega], \end{aligned} \quad (1.6)$$

мұнда

$$\tilde{f}(x, t) = f(x, t) + a_2 \varphi'(t) + a_2 \psi'(t)x + a_3 [\varphi(t) + \psi(t)x],$$

$$\tilde{\theta}(x) = \theta(x) + b_3 [\varphi'(0) + \psi'(0)x] + b_5 [\varphi(0) + \psi(0)x] +$$

$$+ b_4 [\varphi'(T) + \psi'(T)x] + b_6 [\varphi(T) + \psi(T)x]$$

(1.1)-(1.4) және (1.5), (1.6) есептері келесі мағынада пара-пар: егер  $u(x, t)$  (1.1)-(1.4) есебінің шешімі болса, онда  $w(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$  функциясы (1.5), (1.6) интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін бейлокал шеттік есептің шешімі болады. Егер  $w(x, t)$  функциясы (1.5), (1.6) есебінің шешімі болса, онда  $u(x, t) = \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi w(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi$  үшінші ретті (1.1)-(1.4) бейлокал шеттік есебінің шешімі болып табылады.

$h > 0$ :  $Nh = T$  қадамы бойынша  $[0, T) = \bigcup_{r=1}^N [(r-1)h, rh)$ ,  $N = 1, 2, \dots$  бөліктеуін жүргіземіз. Бұл жағдайда  $\Omega$  облысы  $N$  бөлікке бөлінеді.  $w_r(x, t)$  арқылы  $w(x, t)$  функциясының  $\Omega_r = [0, \omega] \times [(r-1)h, rh)$ ,  $r = \overline{1, N}$  облысындағы мәнін белгілейміз.

(1.5), (1.6) есебінде  $\lambda_r(x) = w_r(x, (r-1)h)$  белгілеуін енгізіп,

$$\tilde{w}_r(x, t) = w_r(x, t) - \lambda_r(x), \quad r = \overline{1, N},$$

алмастыруын жасаймыз.  $\lambda_r(x)$  белгісіз функциялары бар пара-пар шеттік есебін аламыз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}_r(x, t)}{\partial t} &= a_1 \tilde{w}_r(x, t) + a_1 \lambda_r(x) + a_2 \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi + \\ &+ a_3 \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_r(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + a_3 \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r(\xi_1) d\xi_1 d\xi + \tilde{f}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_r, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\tilde{w}_r(x, (r-1)h) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned}
& b_1 \lambda_1(x) + b_2 \lambda_N(x) + b_2 \lim_{t \rightarrow Nh-0} \tilde{w}_N(x, t) + b_3 \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_1(\xi_1, 0)}{\partial t} d\xi_1 d\xi + \\
& + b_4 \int_0^x \int_0^\xi \lim_{t \rightarrow Nh-0} \frac{\partial \tilde{w}_N(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi + b_5 \int_0^x \int_0^\xi \lambda_1(\xi_1) d\xi_1 d\xi + \\
& + b_6 \int_0^x \int_0^\xi \lim_{t \rightarrow Nh-0} \tilde{w}_N(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + b_6 \int_0^x \int_0^\xi \lambda_N(\xi_1) d\xi_1 d\xi = \tilde{\theta}(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (1.9)
\end{aligned}$$

$$\lambda_s(x) + \lim_{t \rightarrow sh-0} \tilde{w}_s(x, t) = \lambda_{s+1}(x), \quad x \in [0, \omega], \quad s = \overline{1, N-1}, \quad (1.10)$$

мұнда (1.10) – бөліктеудің ішкі сызықтарындағы функцияның үзіліссіздік шарты.

$C(\Omega_r, R^N)$  (сәйкесінше,  $C([0, \omega], R^N)$ ) арқылы  $\Omega_r$ ,  $r = \overline{1, N}$ , облысында үзіліссіз  $\tilde{w}_r: \Omega_r \rightarrow R^N$  ( $\lambda_r: [0, \omega] \rightarrow R^N$ ) функциялар кеңістігін белгілейміз. Кеңістік нормасы:

$$\|\tilde{w}\|_1 = \max_{r=\overline{1, N}} \sup_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{w}_r(x, t)\|, \quad \|\lambda\|_2 = \max_{r=\overline{1, N}} \sup_{x \in [0, \omega]} \|\lambda_r(x)\|.$$

(1.7)-(1.10) есебінің шешімі  $\{\tilde{w}^*(x, [t]), \lambda^*(x)\}$  жұбы болып табылады, мұндағы

$$\tilde{w}^*(x, [t]) = (\tilde{w}_1^*(x, t), \tilde{w}_2^*(x, t), \dots, \tilde{w}_N^*(x, t)) \in C(\Omega_r, R^N),$$

$$\lambda^*(x) = (\tilde{\lambda}_1^*(x, t), \tilde{\lambda}_2^*(x, t), \dots, \tilde{\lambda}_N^*(x, t))' \in C([0, \omega], R^N).$$

Мұнда  $\Omega_r$  облысында  $t$  бойынша үзіліссіз және үзіліссіз дифференциалданатын  $\tilde{w}_r^*(x, t)$  функциясы  $\lambda_r(x) = \lambda_r^*(x)$ ,  $r = \overline{1, N}$ , болғанда (1.7) интегралды-дифференциалдық теңдеуін, (1.8) бастапқы шарттарын және  $\lambda_r^*(x)$ ,  $\lambda_r^*(x) + \lim_{t \rightarrow rh-0} \tilde{w}_r^*(x, t)$ ,  $r = \overline{1, N}$  болғанда (1.9), (1.10) теңдіктерін қанағаттандырады.

Егер  $\{\tilde{w}^*(x, [t]), \lambda^*(x)\}$  жұбы (1.7)-(1.10) есебінің шешімі болса, онда  $\tilde{w}^*(x, t) = \lambda_r^*(x) + \tilde{w}_r^*(x, t)$ ,  $r = \overline{1, N}$ ,  $\tilde{w}^*(x, T) = \lambda_N^*(x) + \lim_{t \rightarrow rh-0} \tilde{w}_N^*(x, t)$  теңдіктерімен анықталатын  $\tilde{w}^*(x, t)$  функциясы (1.5), (1.6) интегралдық-дифференциалдық теңдеуіне арналған сызықтық шеттік есептің шешімі болады.

(1.7), (1.8) есебі  $\lambda_r(x)$ -тің бекітілген мәндерінде интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бірпараметрлі Коши есебінің үйірі болады, мұндағы  $x \in [0, \omega]$ , және келесі интегралдық теңдеуге пара-пар:

$$\tilde{w}_r(x, t) = a_1 \int_{(r-1)h}^t \tilde{w}_r(x, \tau) d\tau + a_1 [t - (r-1)h] \lambda_r(x) +$$

$$\begin{aligned}
& +a_2 \int_{(r-1)h}^t \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}(\xi_1, \tau)}{\partial \tau} d\xi_1 d\xi d\tau + a_3 \int_{(r-1)h}^t \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_r(\xi_1, \tau) d\xi_1 d\xi d\tau + \\
& + a_3 [t - (r-1)h] \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r(\xi_1) d\xi_1 d\xi + \int_{(r-1)h}^t \tilde{f}(x, \tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Соңғы теңдеуде  $\tilde{w}_r(x, \tau)$  орнына осы теңдеудің оң жағын  $m$  рет қойып

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_r(x, t) = & D_{mr}(t)\lambda_r(x) + G_{mr}(x, t, \tilde{w}_r) + A_{mr} \left( x, t, \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_r}{\partial t} d\xi_1 d\xi \right) + \\
& + B_{mr} \left( x, t, \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_r d\xi_1 d\xi \right) + E_{mr}(t) \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r(\xi_1) d\xi_1 d\xi + F_{mr}(x, t), \quad (1.11)
\end{aligned}$$

мұнда

$$\begin{aligned}
D_{mr}(t) &= \sum_{j=1}^m \int_{(r-1)h}^t a_1 \dots \int_{(r-1)h}^{\tau_{j-1}} a_1 d\tau_{j+1} \dots d\tau_1, \\
E_{mr}(t) &= \sum_{j=1}^m \int_{(r-1)h}^t a_1 \int_{(r-1)h}^{\tau_1} a_1 \dots \int_{(r-1)h}^{\tau_{j-1}} a_3 d\tau_{j+1} \dots d\tau_2 d\tau_1, \\
G_{mr}(x, t, \tilde{w}_r) &= (a_1)^m \int_{(r-1)h}^t \dots \int_{(r-1)h}^{\tau_{m-2}} \dots \int_{(r-1)h}^{\tau_{m-1}} \tilde{w}_r(x, \tau_m) d\tau_m d\tau_{m-1} \dots d\tau_1, \\
A_{mr} \left( x, t, \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_r}{\partial t} d\xi_1 d\xi \right) &= a_2 \int_{(r-1)h}^t \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_r(\xi_1, \tau_1)}{\partial \tau} d\xi_1 d\xi d\tau_1 + \\
& + a_2 \sum_{j=1}^{m-1} \int_{(r-1)h}^t a_1 \dots \int_{(r-1)h}^{\tau_{j-1}} a_1 \int_{(r-1)h}^{\tau_j} \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_r(\xi_1, \tau_{j+1})}{\partial \tau_{j+1}} d\xi_1 d\xi d\tau_{j+1} d\tau_j \dots d\tau_1, \\
B_{mr} \left( x, t, \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_r d\xi_1 d\xi \right) &= a_3 \int_{(r-1)h}^t \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_r(\xi_1, \tau) d\xi_1 d\xi d\tau + \\
& + a_3 \sum_{j=1}^{m-1} \int_{(r-1)h}^t a_1 \dots \int_{(r-1)h}^{\tau_{j-1}} a_1 \int_{(r-1)h}^{\tau_j} \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}(\xi_1, \tau_{j+1}) d\xi_1 d\xi d\tau_{j+1} d\tau_j \dots d\tau_1,
\end{aligned}$$

$$F_{mr}(x, t) = \int_{(r-1)h}^t \tilde{f}(x, \tau) d\tau + \sum_{j=1}^{m-1} \int_{(r-1)h}^t a_1 \dots \int_{(r-1)h}^{\tau_{j-1}} a_1 \int_{(r-1)h}^{\tau_j} f(\xi_1, \tau_{j+1}) d\tau_{j+1} d\tau_j \dots d\tau_1.$$

(1.11)-де  $t \rightarrow rh - 0$  ұмтылғанда шекке көшіп, (1.9), (1.10)-ға  $\lim_{t \rightarrow Nh-0} \tilde{w}_N(x, t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow sh-0} \tilde{w}_s(x, t)$  орнына оған  $\lambda_r(x)$ ,  $r = \overline{1, N}$ , белгісіз функцияларына арналған оң жақ бөліктерін қойып және (1.9) теңдеуінің екі жағын да  $h > 0$  көбейту арқылы келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{aligned} & hb_1 \lambda_1(x) + hb_2 \lambda_N(x) + hb_2 D_{mN}(Nh) \lambda_N(x) + \\ & + hb_5 \int_0^x \int_0^\xi \lambda_1(\xi_1) d\xi_1 d\xi + hb_6 \int_0^x \int_0^\xi \lambda_N(\xi_1) d\xi_1 d\xi + hb_2 E_{mN}(Nh) \int_0^x \int_0^\xi \lambda_N(\xi_1) d\xi_1 d\xi = \\ & = -hb_2 G_{mN}(x, Nh, \tilde{w}_N) - hb_2 A_{mN} \left( x, Nh, \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_N}{\partial t} d\xi_1 d\xi \right) - \\ & - hb_2 B_{mN} \left( x, Nh, \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_N d\xi_1 d\xi \right) - hb_2 F_{mN}(x, Nh) - \\ & - hb_3 \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_1(\xi_1, 0)}{\partial t} d\xi_1 d\xi - hb_4 \int_0^x \int_0^\xi \lim_{t \rightarrow Nh-0} \frac{\partial \tilde{w}_N(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi - \\ & - hb_6 \int_0^x \int_0^\xi \lim_{t \rightarrow Nh-0} \tilde{w}_N(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + h\tilde{\theta}(x), \quad x \in [0, \omega], \\ & \lambda_s(x) + a_1 D_{ms}(sh) \lambda_s(x) - \lambda_{s+1}(x) + a_3 D_{ms}(sh) \int_0^x \int_0^\xi \lambda_s(\xi_1) d\xi_1 d\xi = \\ & = -G_{ms}(x, sh, s_N) - A_{ms} \left( x, sh, \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_s}{\partial t} d\xi_1 d\xi \right) - \\ & - B_{ms} \left( x, sh, \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_s d\xi_1 d\xi \right) - F_{ms}(x, sh), \quad x \in [0, \omega], \quad s = \overline{1, N-1}, \end{aligned}$$

немесе бұл жүйені келесі түрде жазуға болады:

$$Q_m(h) \lambda(x) + S_m(h) \int_0^x \int_0^\xi \lambda(\xi_1) d\xi_1 d\xi =$$

$$= -G_m(x, h, \tilde{w}) - A_m \left( x, h, \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} d\xi_1 d\xi \right) - B_m \left( x, h, \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w} d\xi_1 d\xi \right) - F_m(x, h), \quad (1.12)$$

мұнда  $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_N(x))'$ .

$$Q_m(h) = \begin{pmatrix} hb_1 & 0 & \dots & hb_2(1 + D_{mN}(Nh)) \\ 1 + D_{m1}(h) & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 + D_{m2}(2h) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix},$$

$$S(h) = \begin{pmatrix} hb_5 & 0 & \dots & h(b_6 + b_2 E_{mN}(Nh)) \\ E_{m1}(h) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_{m2}(2h) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_m(x, h, \tilde{w}) = (hb_2 G_{mN}(x, Nh, \tilde{w}_N), G_{m1}(x, h, \tilde{w}_1), \dots, G_{m,N-1}(x, (N-1)h, \tilde{w}_{N-1}))$$

$$A_m \left( x, h, \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} d\xi_1 d\xi \right) = \left( hb_2 A_{mN} \left( x, Nh, \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_N}{\partial t} d\xi_1 d\xi \right) + \right. \\ \left. + hb_3 \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_1(\xi_1, 0)}{\partial t} d\xi_1 d\xi + hb_4 \int_0^x \int_0^\xi \lim_{t \rightarrow Nh-0} \frac{\partial \tilde{w}_N(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi, \right.$$

$$\left. A_{m1} \left( x, h, \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial t} d\xi_1 d\xi \right), \dots, A_{m,N-1} \left( x, (N-1)h, \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_{N-1}}{\partial t} d\xi_1 d\xi \right) \right)'$$

$$B_m \left( x, h, \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w} d\xi_1 d\xi \right) =$$

$$= \left( hb_2 B_{mN} \left( x, Nh, \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_N d\xi_1 d\xi \right) + hb_6 \int_0^x \int_0^\xi \lim_{t \rightarrow Nh-0} \tilde{w}_N(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi, \right.$$

$$\left. B_{m1} \left( x, h, \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_1 d\xi_1 d\xi \right), \dots, B_{m,N-1} \left( x, h, \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_{N-1} d\xi_1 d\xi \right) \right)'$$

$$F_m(x, h) = (hb_2 F_{mN}(x, Nh) - h\tilde{\theta}(x), F_{m1}(x, h), \dots, F_{m,N-1}(x, (N-1)h))'$$

$\left\{ \frac{\partial \tilde{w}_r(x,t)}{\partial t}, \lambda_r(x), \tilde{w}_r(x,t) \right\}$ ,  $r = \overline{1, N}$ , функциялар үштігінен тұратын жүйенің шешімін табу үшін (1.7), (1.8) Коши есебі мен (1.12) және (1.11) теңдеулерінен тұратын тұйық жүйе аламыз. Бастапқы жуықтау ретінде  $\tilde{w}_r(x,t) = 0$  деп алып, (1.7)-(1.10) шеттік есебінің шешімін  $\left\{ \frac{\partial \tilde{w}_r^{(k)}(x,t)}{\partial t}, \lambda_r^{(k)}(x), \tilde{w}_r^{(k)}(x,t) \right\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  үштіктер тізбегінің шегі ретінде табамыз. Бұл үштіктер келесі алгоритм бойынша анықталады:

*0-қадам.*  $Q_m(h)$  матрицасының кері матрицасы бар деп болжап,  $\tilde{w}_r(x,t) = 0$  деп алып (1.7), (1.12) және (1.11) теңдеулерінен бірінші жуықтау үштігін  $\left\{ \frac{\partial \tilde{w}_r^{(0)}(x,t)}{\partial t}, \lambda_r^{(0)}(x), \tilde{w}_r^{(0)}(x,t) \right\}$ ,  $r = \overline{1, N}$ , табамыз.

*1-қадам.*  $\tilde{w}_r(x,t) = \tilde{w}_r^{(0)}(x,t)$  деп алып (1.7), (1.12) және (1.11) теңдеулерінен  $\left\{ \frac{\partial \tilde{w}_r^{(1)}(x,t)}{\partial t}, \lambda_r^{(1)}(x), \tilde{w}_r^{(1)}(x,t) \right\}$ ,  $r = \overline{1, N}$ , екінші жуықтау үштігін табамыз.

Үдерісті жалғастыра отырып,  $k$ -ші қадамда  $\left\{ \frac{\partial \tilde{w}_r^{(k)}(x,t)}{\partial t}, \lambda_r^{(k)}(x), \tilde{w}_r^{(k)}(x,t) \right\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  үштіктер жүйесін аламыз.

## 1.2 Бейлокал шеттік есептің шешімін табу алгоритмдерінің жинақтылық шарттары

Ұсынылған алгоритмнің жүзеге асырылуы мен жинақтылығын, сондай-ақ, дәл және жуық шешімдердің айырмасын бағалауды келесі теорема анықтайды.

*1-теорема.* Қандай да  $h > 0$ :  $Nh = T$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , қадамы және  $m$ ,  $m \in N$ , сандары үшін  $(N \times N)$  өлшемді  $Q_m(h)$  матрицасының кері матрицасы бар болсын және келесі теңсіздіктер орындалсын:

$$1) \| [Q_m(h)]^{-1} \| < \gamma_m(h), \quad 2) q_m(h) < 1,$$

мұнда

$$\begin{aligned} q_m(h) &= \max_{x \in [0, \omega]} \| q_m(x, h) \|, \quad q_m(x, h) = \sum_{j=1}^m \frac{(ha_1)^j}{j!} + \frac{(ha_1)^m}{m!} \beta(x) \delta(x) + \\ &+ a_2 \sum_{j=0}^{m-1} \frac{h^{j+1} (a_1)^j}{(j+1)!} \int_0^x \int_0^\xi e^{a_2 \frac{\xi_1^2}{2}} \chi(\xi_1) d\xi_1 d\xi + \frac{x^2}{2!} a_3 \sum_{j=1}^m \frac{h^j (a_1)^{j-1}}{j!} + \\ &+ a_3 \sum_{j=1}^m \frac{h^j (a_1)^{j-1}}{j!} \int_0^x \int_0^\xi \beta(\xi_1) \delta(\xi_1) d\xi_1 d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi(x) &= a_1[1 + \beta(x)\delta(x)] + a_3 \left[ \frac{x^2}{2!} + \int_0^x \int_0^\xi \beta(\xi_1)\delta(\xi_1)d\xi_1d\xi \right], \\ \beta(x) &= h\gamma(h)\exp\left( h\gamma(h)\rho_0 \frac{x^2}{2!} + h\gamma(h)\rho_2 \int_0^x \int_0^\xi e^{a_2\frac{\xi_1^2}{2!}} \left( a_1 + a_3 \frac{\xi_1^2}{2!} \right) d\xi_1d\xi \right), \\ \delta(x) &= a_1 \max\{hb_2, 1\} + \rho_2 a_1 \int_0^x \int_0^\xi \frac{\xi_1^2}{2!} e^{a_2\frac{\xi_1^2}{2!}} d\xi_1d\xi + \\ &\quad + \rho_2 a_3 \int_0^x \int_0^\xi \frac{\xi_1^2}{2!} e^{a_2\frac{\xi_1^2}{2!}} d\xi_1d\xi + \rho_3 \frac{x^2}{2!}, \\ \rho_0 &= b_5 + b_6 + a_1 a_3 \max\{hb_2, 1\} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(ha_1)^j}{(j+1)!}, \\ \rho_1 &= \frac{(ha_1)^m}{m!} \max\{hb_2, 1\}, \\ \rho_2 &= b_3 + b_4 + a_2 \max\{hb_2, 1\} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(ha_1)^j}{(j+1)!}, \\ \rho_3 &= b_6 + a_3 \max\{hb_2, 1\} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(ha_1)^j}{(j+1)!}, \\ \rho_4 &= 1 + \max\{hb_2, 1\} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(ha_1)^j}{(j+1)!}. \end{aligned}$$

Онда (1.7)-(1.10) есебінің жалғыз шешімі  $\{\tilde{w}^*(x, [t]), \lambda^*(x)\}$  бар және келесі бағалаулар орындалады:

$$\begin{aligned} &\text{а) } \|\tilde{w}^* - \tilde{w}^{(k)}\|_1 \leq \\ &\leq \sum_{j=k+1}^{\infty} [q_m(h)]^j \max_{x \in [0, \omega]} \|q_0(x, h)\| \max \left\{ \max_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{\theta}(x)\|, \max_{(x,t) \in \Omega} \|\tilde{f}(x, t)\| \right\}, \\ &\text{ә) } \|\lambda^* - \lambda^{(k)}\|_2 \leq \\ &\leq \max_{x \in [0, \omega]} \|\beta(x)\delta(x)\| \sum_{j=k}^{\infty} [q_m(h)]^j \max_{x \in [0, \omega]} \|q_0(x, h)\| \max \left\{ \max_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{\theta}(x)\|, \max_{(x,t) \in \Omega} \|\tilde{f}(x, t)\| \right\}, \end{aligned}$$

мұнда

$$q_0(x, h) = \sum_{j=1}^m \frac{(ha_1)^j}{j!} \beta(x)\delta_0(x) + h\rho_2 \int_0^x \int_0^\xi e^{a_2\frac{\xi^2}{2}} \chi_0(\xi)d\xi + h\rho_3 \int_0^x \int_0^\xi \beta(\xi_1)\delta_0(\xi_1)d\xi_1d\xi,$$

$$\chi_0(x) = a_1\beta(x)\delta_0(x) + a_3 \int_0^x \int_0^\xi \beta(\xi_1)\delta_0(\xi_1)d\xi_1 d\xi + 1,$$

$$\delta_0(x) = \rho_2 a_1 \int_0^x \int_0^\xi e^{a_2 \frac{\xi_1^2}{2}} d\xi_1 d\xi + \rho_4.$$

1-теореманы дәлелдемес бұрын [103, с. 58] әдебиетте келтірілген 2.1-теоремаға ұқсас 2-теореманы дәлелдейік.

*2-теорема.*  $t \geq \tau \geq x \geq y \geq a$  үшін  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $h(t, \tau)$ ,  $H(t, \tau, x)$ ,  $G(s, \tau, x, y)$  – теріс емес функциялар. Егер

$$u(t) \leq c_1 + c_2 \int_a^t v(s)u(s)ds + c_3 \int_a^t \int_a^s h(s, \tau)u(\tau) d\tau ds +$$

$$+ c_4 \int_a^t \int_a^s \int_a^\tau H(s, \tau, x)u(x)dxd\tau ds + c_5 \int_a^t \int_a^s \int_a^\tau \int_a^x G(s, \tau, x, y)u(y)dydxd\tau ds,$$

болса, онда

$$u \leq c_1 \exp\{c_2 \int_a^t v(s)ds + c_3 \int_a^t \int_a^s h(s, \tau)d\tau ds + c_4 \int_a^t \int_a^s \int_a^\tau H(s, \tau, x)dxd\tau ds +$$

$$+ c_5 \int_a^t \int_a^s \int_a^\tau \int_a^x G(s, \tau, x, y)dydxd\tau ds\}, t \geq a. \quad (i)$$

орынды болады, мұндағы  $c_1, c_2, c_3, c_4$  – бір уақытта нөлге тең болмайтын теріс емес тұрақтылар.

*2-теореманың дәлелдеуі.* Бастапқы теңсіздіктің оң жағын  $b(t)$  арқылы белгілейміз. Онда  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $h(t, \tau)$ ,  $H(t, \tau, x)$ ,  $G(s, \tau, x, y)$  функцияларының теріс еместігінен  $s \leq t$  үшін  $b(s) \leq b(t)$  және

$$\frac{b'(t)}{b(t)} = c_2 v(t) \frac{u(t)}{b(t)} + c_3 \int_a^t h(t, \tau) \frac{u(\tau)}{b(t)} d\tau +$$

$$+ c_4 \int_a^t \int_a^\tau H(t, \tau, x) \frac{u(x)}{b(t)} dx d\tau + c_5 \int_a^t \int_a^\tau \int_a^x G(s, \tau, x, y) \frac{u(y)}{b(t)} dydxd\tau \leq$$

$$\leq c_2 v(t) + c_3 \int_a^t h(t, \tau) d\tau + c_4 \int_a^t \int_a^\tau H(t, \tau, x) dx d\tau + c_5 \int_a^t \int_a^\tau \int_a^x G(s, \tau, x, y) dydxd\tau.$$

Соңғы теңсіздікті  $a$ -дан  $t$ -ға дейінгі аралықта интегралдаймыз:

$$\begin{aligned}
& \ln b(t) - \ln c_1 \leq c_2 \int_a^t v(s) ds + c_3 \int_a^t \int_a^s h(s, \tau) d\tau ds + \\
& + c_4 \int_a^t \int_a^s \int_a^\tau H(t, \tau, x) dx d\tau ds + c_5 \int_a^t \int_a^s \int_a^\tau \int_a^x G(s, \tau, x, y) dy dx d\tau ds, \\
& b(t) \leq c_1 \exp\{c_2 \int_a^t v(s) u(s) ds + c_3 \int_a^t \int_a^s h(s, \tau) u(\tau) d\tau ds + \\
& + c_4 \int_a^t \int_a^s \int_a^\tau H(t, \tau, x) dx d\tau ds + c_5 \int_a^t \int_a^s \int_a^\tau \int_a^x G(s, \tau, x, y) dy dx d\tau ds\}.
\end{aligned}$$

Бұдан кейін (i) теңсіздігін алу үшін  $u(t) \leq b(t)$  теңсіздігін қолдану ғана қалады.

2-теорема дәлелденді.

1-теореманың дәлелдеуі. Келесі теңсіздіктер орындалады:

$$\begin{aligned}
& \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|D_{mr}(t)\| \leq \sum_{j=1}^m \frac{(ha_1)^j}{j!}, \\
& \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|E_{mr}(t)\| \leq a_3 \sum_{j=1}^m \frac{h^j (a_1)^{j-1}}{j!} \\
& \|S_m(h)\| \leq h \left( b_5 + b_6 + a_3 \max\{hb_2, 1\} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(ha_1)^j}{(j+1)!} \right) = h\rho_0, \\
& \|G_m(x, h, \tilde{w})\| \leq \frac{(ha_1)^m}{m!} \max\{hb_2, 1\} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{w}_r(x, t)\| = \\
& = h\rho_1 \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{w}_r(x, t)\|, \\
& \left\| A_m \left( x, h, \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} d\xi_1 d\xi \right) \right\| \leq \\
& \leq h \left( b_3 + b_4 + a_2 \max\{hb_2, 1\} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(ha_1)^j}{(j+1)!} \right) \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{w}_r(\xi_1, t)}{\partial t} \right\| d\xi_1 d\xi = \\
& = h\rho_2 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{w}_r(\xi_1, t)}{\partial t} \right\| d\xi_1 d\xi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\| B_m \left( x, h, \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w} d\xi_1 d\xi \right) \right\| \leq \\
& \leq h \left( b_6 + a_3 \max\{hb_2, 1\} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(ha_1)^j}{(j+1)!} \right) \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{w}_r(\xi_1, t)\| d\xi_1 d\xi = \\
& = h\rho_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{w}_r(\xi_1, t)\| d\xi_1 d\xi, \\
& \|F(x, h)\| \leq h\|\tilde{\theta}(x)\| + h \max\{hb_2, 1\} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(ha_1)^j}{j!} \sup_{t \in [0, T]} \|\tilde{f}(x, t)\| \leq \\
& \leq h \left\{ 1 + \max\{hb_2, 1\} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(ha_1)^j}{(j+1)!} \right\} \max \left\{ \max_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{\theta}(x)\|, \max_{(x, t) \in \Omega} \|\tilde{f}(x, t)\| \right\} = \\
& = h\rho_4 \max \left\{ \max_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{\theta}(x)\|, \max_{(x, t) \in \Omega} \|\tilde{f}(x, t)\| \right\}. \\
& \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{w}_r^{(0)}(x, t)}{\partial t} \right\| \leq \\
& \leq a_1 \max_{r=1, N} \|\lambda_r^{(0)}(x)\| + a_2 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, t)}{\partial t} \right\| d\xi_1 d\xi + \\
& + a_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \|\lambda_r^{(0)}(\xi_1)\| d\xi_1 d\xi + \sup_{t \in [0, T]} \|\tilde{f}(x, t)\|.
\end{aligned}$$

Еселі интегралдары бар сызыктық интегралдық теңсіздікті [103, с. 58] қолданып келесіні аламыз:

$$\begin{aligned}
& \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{w}_r^{(0)}(x, t)}{\partial t} \right\| \leq e^{a_2 \frac{x^2}{2}} \left[ a_1 \max_{r=1, N} \|\lambda_r^{(0)}(x)\| + \right. \\
& \left. + a_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \|\lambda_r^{(0)}(\xi_1)\| d\xi_1 d\xi + \sup_{t \in [0, T]} \|\tilde{f}(x, t)\| \right] \quad (1.13) \\
& \max_{r=1, N} \|\lambda_r^{(0)}(x)\| \leq h\gamma(h)[\rho_0 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \|\lambda_r^{(0)}(\xi_1)\| d\xi_1 d\xi +
\end{aligned}$$

$$+ \rho_2 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, t)}{\partial t} \right\| d\xi_1 d\xi + \rho_4 \max \left\{ \max_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{\theta}(x)\|, \max_{(x, t) \in \Omega} \|\tilde{f}(x, t)\| \right\} \quad (1.14)$$

(1.13)-ті (1.14)-ке қойып  $\max_{r=1, N} \|\lambda_r^{(0)}(x)\|$  табамыз:

$$\begin{aligned} \max_{r=1, N} \|\lambda_r^{(0)}(x)\| &\leq h\gamma(h) \left[ \rho_0 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \|\lambda_r^{(0)}(\xi_1)\| d\xi_1 d\xi + \right. \\ &+ \rho_2 a_1 \int_0^x \int_0^\xi e^{a_2 \frac{\xi_1^2}{2}} \max_{r=1, N} \|\lambda_r^{(0)}(\xi_1)\| d\xi_1 d\xi + \rho_2 a_3 \int_0^x \int_0^\xi e^{a_2 \frac{\xi_1^2}{2}} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \max_{r=1, N} \|\lambda_r^{(0)}(\xi_3)\| d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 d\xi + \\ &\left. + \rho_2 a_1 \int_0^x \int_0^\xi e^{a_2 \frac{\xi^2}{2}} \sup_{t \in [0, T]} \|\tilde{f}(\xi, t)\| d\xi + \rho_4 \max \left\{ \max_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{\theta}(x)\|, \max_{(x, t) \in \Omega} \|\tilde{f}(x, t)\| \right\} \right] \end{aligned}$$

2-теоремадағы теңсіздікті қолданып келесіні аламыз:

$$\begin{aligned} \max_{r=1, N} \|\lambda_r^{(0)}(x)\| &\leq \\ &\leq h\gamma(h) \exp \left\{ h\gamma(h) \rho_0 \frac{x^2}{2!} + h\gamma(h) \rho_2 \int_0^x \int_0^\xi e^{a_2 \frac{\xi_1^2}{2}} \left( a_1 + a_3 \frac{\xi_1^2}{2!} \right) d\xi_1 d\xi \right\} \times \\ &\times \left\{ \rho_2 a_1 \int_0^x \int_0^\xi e^{a_2 \frac{\xi_1^2}{2}} d\xi_1 d\xi + \rho_4 \right\} \max \left\{ \max_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{\theta}(x)\|, \max_{(x, t) \in \Omega} \|\tilde{f}(x, t)\| \right\} \leq \\ &\leq \beta(x) \delta_0(x) \max \left\{ \max_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{\theta}(x)\|, \max_{(x, t) \in \Omega} \|\tilde{f}(x, t)\| \right\} \quad (1.15) \end{aligned}$$

$$\|\lambda^{(0)}\|_2 \leq \max_{x \in [0, \omega]} \|\beta(x) \delta_0(x)\| \max \left\{ \max_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{\theta}(x)\|, \max_{(x, t) \in \Omega} \|\tilde{f}(x, t)\| \right\}.$$

(1.15)-ті (1.13)-ке қоямыз:

$$\left\| \frac{\partial \tilde{w}^{(0)}}{\partial t} \right\|_1 \leq \max_{x \in [0, \omega]} \left\| e^{a_2 \frac{x^2}{2}} \chi_0(x) \right\| \max \left\{ \max_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{\theta}(x)\|, \max_{(x, t) \in \Omega} \|\tilde{f}(x, t)\| \right\} \quad (1.16)$$

$\max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{w}_r^{(0)}(x, t)\|$  табамыз:

$$\max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{w}_r^{(0)}(x, t)\| \leq \sum_{j=1}^m \frac{(ha_1)^j}{j!} \max_{r=1, N} \|\lambda_r^{(0)}(x)\| +$$

$$+h\rho_2 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, t)}{\partial t} \right\| d\xi_1 d\xi + h\rho_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1,N} \left\| \lambda_r^{(0)}(\xi_1) \right\| d\xi_1 d\xi,$$

$$\|\tilde{w}\|_2 \leq \max_{x \in [0, \omega]} \|q_0(x, h)\| \max \left\{ \max_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{\theta}(x)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\tilde{f}(x, t)\| \right\}.$$

Алгоритмнің  $k$ -шы қадамында келесі бағалауларды аламыз:

$$\begin{aligned} & \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{w}_r^{(k+1)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}_r^{(k)}(x, t)}{\partial t} \right\| \leq \\ & \leq a_1 \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(x, t) \right\| + a_1 \max_{r=1,N} \left\| \lambda_r^{(k+1)}(x) - \lambda_r^{(k)}(x) \right\| + \\ & + a_2 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{w}_r^{(k+1)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}_r^{(k)}(x, t)}{\partial t} \right\| d\xi_1 d\xi + \\ & + a_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(x, t) \right\| d\xi_1 d\xi + \\ & + a_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1,N} \left\| \lambda_r^{(k+1)}(\xi_1) - \lambda_r^{(k)}(\xi_1) \right\| d\xi_1 d\xi. \end{aligned}$$

Құрамында еселі интегралдар бар сызықтық интегралдық теңсіздікті [103, с. 58] қолдана отырып келесіні анықтаймыз:

$$\begin{aligned} & \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{w}_r^{(k+1)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}_r^{(k)}(x, t)}{\partial t} \right\| \leq \\ & \leq e^{a_2 \frac{x^2}{2}} \left[ a_1 \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(x, t) \right\| + \right. \\ & \quad \left. + a_1 \max_{r=1,N} \left\| \lambda_r^{(k+1)}(x) - \lambda_r^{(k)}(x) \right\| + \right. \\ & + a_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(x, t) \right\| d\xi_1 d\xi + \\ & \quad \left. + a_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1,N} \left\| \lambda_r^{(k+1)}(\xi_1) - \lambda_r^{(k)}(\xi_1) \right\| d\xi_1 d\xi \right] \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned}
\max_{r=1,N} \|\lambda_r^{(k+1)}(x) - \lambda_r^{(k)}(x)\| &\leq h\gamma(h) \left[ \rho_0 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1,N} \|\lambda_r^{(k+1)}(\xi_1) - \lambda_r^{(k)}(\xi_1)\| d\xi_1 d\xi + \right. \\
&+ \rho_1 \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{w}_r^{(k)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(x, t)\| + \\
&+ \rho_2 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{w}_r^{(k+1)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}_r^{(k)}(x, t)}{\partial t} \right\| d\xi_1 d\xi + \\
&\left. + \rho_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{w}_r^{(k)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(x, t)\| d\xi_1 d\xi \right] \quad (1.18)
\end{aligned}$$

(1.17)-ні (1.18)-ге қойып,  $\max_{r=1,N} \|\lambda_r^{(k+1)}(x) - \lambda_r^{(k)}(x)\|$  табамыз:

$$\begin{aligned}
\max_{r=1,N} \|\lambda_r^{(k+1)}(x) - \lambda_r^{(k)}(x)\| &\leq h\gamma(h) \left[ \rho_0 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1,N} \|\lambda_r^{(k+1)}(\xi_1) - \lambda_r^{(k)}(\xi_1)\| d\xi_1 d\xi + \right. \\
&+ \rho_1 \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{w}_r^{(k)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(x, t)\| + \\
&+ \rho_2 a_1 \int_0^x \int_0^\xi e^{a_2 \frac{\xi_1^2}{2}} \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{w}_r^{(k)}(\xi_1, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(\xi_1, t)\| d\xi_1 d\xi + \\
&+ \rho_2 a_1 \int_0^x \int_0^\xi e^{a_2 \frac{\xi_1^2}{2}} \max_{r=1,N} \|\lambda_r^{(k+1)}(\xi_1) - \lambda_r^{(k)}(\xi_1)\| d\xi_1 d\xi + \\
&+ \rho_2 a_3 \int_0^x \int_0^\xi e^{a_2 \frac{\xi_1^2}{2}} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{w}_r^{(k)}(\xi_3, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(\xi_3, t)\| d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 d\xi + \\
&+ \rho_2 a_3 \int_0^x \int_0^\xi e^{a_2 \frac{\xi_1^2}{2}} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \max_{r=1,N} \|\lambda_r^{(k+1)}(\xi_1) - \lambda_r^{(k)}(\xi_1)\| d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 d\xi + \\
&\left. + \rho_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{w}_r^{(k)}(\xi_1, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(\xi_1, t)\| d\xi_1 d\xi \right].
\end{aligned}$$

2-теореманың теңсіздігін қолданып келесіні аламыз:

$$\begin{aligned}
& \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(k+1)}(x) - \lambda_r^{(k)}(x) \right\| \leq \\
& \leq h\gamma(h) \exp(h\gamma(h)) \rho_0 \frac{x^2}{2} + h\gamma(h) \rho_2 \int_0^x \int_0^\xi e^{a_2 \frac{\xi_1^2}{2}} (a_1 + a_3 \frac{\xi_1^2}{2}) d\xi_1 d\xi \times \\
& \quad \times \left[ \rho_1 \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(x, t) \right\| + \right. \\
& \quad + \rho_2 a_3 \int_0^x \int_0^\xi e^{a_2 \frac{\xi_1^2}{2}} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k)}(\xi_1, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(\xi_1, t) \right\| d\xi_1 d\xi + \\
& \quad + \rho_2 a_3 \int_0^x \int_0^\xi e^{a_2 \frac{\xi_1^2}{2}} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k)}(\xi_3, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(\xi_3, t) \right\| d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 d\xi + \\
& \quad \left. + \rho_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k)}(\xi_1, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(\xi_1, t) \right\| d\xi_1 d\xi \right] \quad (1.19)
\end{aligned}$$

$$\left\| \lambda_r^{(k+1)}(x) - \lambda_r^{(k)}(x) \right\|_2 \leq \max_{x \in [0, \omega]} \left\| \beta(x) \delta(x) \right\| \left\| \tilde{w}_r^{(k)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(x, t) \right\|_1 \quad (1.20)$$

(1.19)-ды (1.17)-ге қоямыз:

$$\begin{aligned}
& \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{w}_r^{(k+1)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}_r^{(k)}(x, t)}{\partial t} \right\| \leq \\
& \leq e^{a_2 \frac{x^2}{2}} a_1 \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(x, t) \right\| + \\
& \quad + e^{a_2 \frac{x^2}{2}} a_1 \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(k+1)}(x) - \lambda_r^{(k)}(x) \right\| + \\
& \quad + e^{a_2 \frac{x^2}{2}} a_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k)}(\xi_1, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(\xi_1, t) \right\| d\xi_1 d\xi + \\
& \quad + e^{a_2 \frac{x^2}{2}} a_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(k+1)}(\xi_1) - \lambda_r^{(k)}(\xi_1) \right\| d\xi_1 d\xi \leq \\
& \leq e^{a_2 \frac{x^2}{2}} a_1 \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(x, t) \right\| + \\
& \quad + e^{a_2 \frac{x^2}{2}} a_1 \beta(x) \left[ \rho_1 \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(x, t) \right\| + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\rho_2 a_1 \int_0^x \int_0^\xi e^{a_2 \frac{\xi_1^2}{2}} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k)}(\xi_1, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(\xi_1, t) \right\| d\xi_1 d\xi + \\
& +\rho_2 a_3 \int_0^x \int_0^\xi e^{a_2 \frac{\xi_1^2}{2}} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k)}(\xi_3, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(\xi_3, t) \right\| d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 d\xi + \\
& +\rho_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k)}(\xi_1, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(\xi_1, t) \right\| d\xi_1 d\xi + \\
& +e^{a_2 \frac{x^2}{2}} a_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k)}(\xi_1, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(\xi_1, t) \right\| d\xi_1 d\xi + \\
& +e^{a_2 \frac{x^2}{2}} a_3 \int_0^x \int_0^\xi \beta(\xi_1) \left[ \rho_1 \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k)}(\xi_1, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(\xi_1, t) \right\| + \right. \\
& +\rho_2 a_1 \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} e^{a_2 \frac{\xi_3^2}{2}} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k)}(\xi_3, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(\xi_3, t) \right\| d\xi_3 d\xi_2 + \\
& +\rho_2 a_3 \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} e^{a_2 \frac{\xi_3^2}{2}} \int_0^{\xi_3} \int_0^{\xi_4} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k)}(\xi_5, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(\xi_5, t) \right\| d\xi_5 d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2 + \\
& \left. +\rho_3 \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k)}(\xi_3, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(\xi_3, t) \right\| d\xi_3 d\xi_2 \right] d\xi_1 d\xi \quad (1.21)
\end{aligned}$$

$$\left\| \frac{\partial \tilde{w}_r^{(k+1)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}_r^{(k)}(x, t)}{\partial t} \right\|_1 \leq \max_{x \in [0, \omega]} \left\| e^{a_2 \frac{x^2}{2}} \chi(x) \right\| \left\| \tilde{w}_r^{(k)} - \tilde{w}_r^{(k-1)} \right\|_1.$$

$\max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k+1)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(k)}(x, t) \right\|$  айырмасының нормасын табамыз:

$$\begin{aligned}
& \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k+1)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(k)}(x, t) \right\| \leq \\
& \leq \sum_{j=1}^m \frac{(ha_1)^j}{j!} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(x, t) \right\| + \\
& \quad + \frac{(ha_1)^m}{m!} \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(k+1)}(x) - \lambda_r^{(k)}(x) \right\| +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_2 \sum_{j=0}^{m-1} \frac{h^{j+1}(a_1)^j}{(j+1)!} \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{w}_r^{(k+1)}(\xi_1, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}_r^{(k)}(\xi_1, t)}{\partial t} \right\| d\xi_1 d\xi + \\
& + a_3 \sum_{j=1}^m \frac{h^j(a_1)^{j-1}}{j!} \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(k)}(\xi_1, t) - \tilde{w}_r^{(k-1)}(\xi_1, t) \right\| d\xi_1 d\xi + \\
& + a_3 \sum_{j=1}^m \frac{h^j(a_1)^{j-1}}{j!} \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(k+1)}(\xi_1) - \lambda_r^{(k)}(\xi_1) \right\| d\xi_1 d\xi. \tag{1.22}
\end{aligned}$$

(1.22)-ге (1.19), (1.21) қатынастарын қоямыз:

$$\left\| \tilde{w}_r^{(k+1)} - \tilde{w}_r^{(k)} \right\|_1 \leq q_m(h) \left\| \tilde{w}_r^{(k)} - \tilde{w}_r^{(k-1)} \right\|_1 \tag{1.23}$$

Келесі теңсіздіктер орындалады:

$$\begin{aligned}
& \left\| \tilde{w}_r^{(k+p)} - \tilde{w}_r^{(k)} \right\|_1 \leq \sum_{j=k+1}^{k+p} [q_m(h)]^j \left\| \tilde{w}_r^{(0)} \right\|_1 \leq \\
& \leq \sum_{j=k+1}^{k+p} [q_m(h)]^j \max_{x \in [0; \omega]} \|q_0(x, h)\| \max \left\{ \max_{x \in [0; \omega]} \|\tilde{\theta}(x)\|, \max_{(x, t) \in \Omega} \|\tilde{f}(x, t)\| \right\}, \\
& \left\| \lambda_r^{(k+p)} - \lambda_r^{(k)} \right\|_2 \leq \max_{x \in [0; \omega]} \|\beta(x)\delta(x)\| \left\| \tilde{w}_r^{(k+p-1)} - \tilde{w}_r^{(k-1)} \right\|_1 \leq \\
& \leq \max_{x \in [0; \omega]} \|\beta(x)\delta(x)\| \sum_{j=k}^{k+p-1} [q_m(h)]^j \max_{x \in [0; \omega]} \|q_0(x, h)\| \max \left\{ \max_{x \in [0; \omega]} \|\tilde{\theta}(x)\|, \max_{(x, t) \in \Omega} \|\tilde{f}(x, t)\| \right\}.
\end{aligned}$$

$p \rightarrow \infty$  ұмтылғанда 1-теореманың а), ә) бағалауларын аламыз.

Шешімнің жалғыздығын дәлелдейміз. (1.7)-(1.10) есебінің басқа  $\{\tilde{w}^{**}(x, [t]), \lambda^{**}(x)\}$  шешімі бар болсын. (1.20), (1.23) теңсіздіктеріне ұқсас келесідей теңсіздіктер орынды болады

$$\|\lambda^* - \lambda^{**}\|_2 \leq \max_{x \in [0; \omega]} \|\beta(x)\delta(x)\| \|\tilde{w}^* - \tilde{w}^{**}\|_1,$$

$$\|\tilde{w}^* - \tilde{w}^{**}\|_1 \leq q_m(h) \|\tilde{w}^* - \tilde{w}^{**}\|_1,$$

мұндағы  $q(h) < 1$ . Бұдан  $\tilde{w}_r^*(x, t) = \tilde{w}_r^{**}(x, t)$ ,  $\lambda_r^*(x) = \lambda_r^{**}(x)$ ,  $(x, t) \in \Omega_r$ ,  $r = \overline{1, N}$ , екендігі шығады.

1-теорема дәлелденді.

*3-теорема.* 1-теореманың шарттары орындалсын. Онда (1.1)-(1.4) есебінің  $u^*(x, t)$  жалғыз шешімі бар және келесі бағалау орындалады:

$$\|u^* - u^{(k)}\|_1 \leq M_m(h) \max_{x \in [0; \omega]} \|q_0(x, h)\| \max\{ \max_{x \in [0; \omega]} \|\tilde{\theta}(x)\|, \max_{(x, t) \in \Omega} \|\tilde{f}(x, t)\| \},$$

мұндағы  $M_m(h) = h \sum_{j=k+1}^{\infty} [q_m(h)]^j [1 + \max_{x \in [0; \omega]} \|\beta(x)\delta(x)\|]$ .

### 1.3 Псевдопараболалық теңдеудің бір класы үшін бейлокал шеттік есептің шешімділігі

$\Omega = [0, \omega] \times [0, T]$  облысында

$$\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} = a_1 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} + a_3 u(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \quad (1.24)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} & b_1 \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 u(x, T)}{\partial x^2} + b_3 \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x \partial t} + \\ & + b_4 \frac{\partial^2 u(x, T)}{\partial x \partial t} + b_5 u(x, 0) + b_6 u(x, T) = \theta(x), \quad x \in [0, \omega] \end{aligned} \quad (1.27)$$

шеттік есебі берілсін. Мұнда  $a_i, b_j - const, i = \overline{1, 3}, j = \overline{1, 6}, \theta(x)$  функциялары  $[0, \omega]$  аралығында үзіліссіз және  $\varphi(t), \psi(t)$  функциялары  $[0, T]$  аралығында үзіліссіз дифференциалданады.

Бұл есептің де шешімін табу үшін  $w(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$  функциясын енгіземіз, сонда

$$u(x, t) = \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi w(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi,$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} = \psi'(t) + \int_0^x \frac{\partial w(\xi, t)}{\partial t} d\xi.$$

Бұдан (1.24)-(1.27) есебі түрде жазылады:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = a_1 w(x, t) + a_2 \int_0^x \frac{\partial w(\xi, t)}{\partial t} d\xi + \\ & + a_3 \int_0^x \int_0^\xi w(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + \tilde{f}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned}
& b_1 w(x, 0) + b_2 w(x, T) + b_3 \int_0^x \frac{\partial w(\xi, 0)}{\partial t} d\xi + b_4 \int_0^x \frac{\partial w(\xi, T)}{\partial t} d\xi + \\
& + b_5 \int_0^x \int_0^\xi w(\xi_1, 0) d\xi_1 d\xi + b_6 \int_0^x \int_0^\xi w(\xi_1, T) d\xi_1 d\xi = \tilde{\theta}(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (1.29)
\end{aligned}$$

мұнда

$$\tilde{f}(x, t) = f(x, t) + a_2 \psi'(t) + a_3 [\varphi(t) + \psi(t)x],$$

$$\tilde{\theta}(x) = \theta(x) + b_3 \psi'(0) + b_4 \psi'(T) + b_5 [\varphi(0) + \psi(0)x] + b_6 [\varphi(T) + \psi(T)x].$$

$h > 0$ :  $Nh = T$  қадамы бойынша  $[0, T) = \bigcup_{r=1}^N [(r-1)h, rh)$ ,  $N = 1, 2, \dots$  бөліктеуін жүргіземіз. Бұл жағдайда  $\Omega$  облысы  $N$  бөлікке бөлінеді.  $w_r(x, t)$  арқылы  $w(x, t)$  функциясының  $\Omega_r = [0, \omega] \times [(r-1)h, rh)$ ,  $r = \overline{1, N}$ , облысындағы мәнін белгілейміз.

(1.25), (1.26) есебінде  $\lambda_r(x) = w_r(x, (r-1)h)$  белгілеуін енгізіп,  $\tilde{w}_r(x, t) = w_r(x, t) - \lambda_r(x)$ ,  $r = \overline{1, N}$ , алмастыруын жасаймыз.  $\lambda_r(x)$  белгісіз функциялары бар пара-пар шеттік есебін аламыз:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tilde{w}_r(x, t)}{\partial t} = a_1 \tilde{w}_r(x, t) + a_1 \lambda_r(x) + a_2 \int_0^x \frac{\partial \tilde{w}(\xi, t)}{\partial t} d\xi + \\
& + a_3 \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_r(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + a_3 \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r(\xi_1) d\xi_1 d\xi + \tilde{f}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_r, \quad (1.30)
\end{aligned}$$

$$\tilde{w}_r(x, (r-1)h) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned}
& b_1 \lambda_1(x) + b_2 \lambda_N(x) + b_2 \lim_{t \rightarrow Nh-0} \tilde{w}_N(x, t) + b_3 \int_0^x \frac{\partial \tilde{w}_1(\xi, 0)}{\partial t} d\xi + \\
& + b_4 \int_0^x \int_0^\xi \lim_{t \rightarrow Nh-0} \frac{\partial \tilde{w}_N(\xi, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi + b_5 \int_0^x \int_0^\xi \lambda_1(\xi_1) d\xi_1 d\xi + \\
& + b_6 \int_0^x \int_0^\xi \lim_{t \rightarrow Nh-0} \tilde{w}_N(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + b_6 \int_0^x \int_0^\xi \lambda_N(\xi_1) d\xi_1 d\xi = \tilde{\theta}(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (1.32)
\end{aligned}$$

$$\lambda_s(x) + \lim_{t \rightarrow sh-0} \tilde{w}_s(x, t) = \lambda_{s+1}(x), \quad x \in [0, \omega], \quad s = \overline{1, N-1}, \quad (1.33)$$

мұнда (1.33) – бөліктеудің ішкі сызықтарындағы функцияның үзіліссіздік шарты.

(1.30), (1.31) есебі келесі интегралдық теңдеуге эквивалентті:

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_r(x, t) = & a_1 \int_{(r-1)h}^t \tilde{w}_r(x, \tau) d\tau + a_1 [t - (r-1)h] \lambda_r(x) + \\
& + a_2 \int_{(r-1)h}^t \int_0^x \frac{\partial \tilde{w}(\xi, t)}{\partial t} d\xi d\tau + a_3 \int_{(r-1)h}^t \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_r(\xi_1, \tau) d\xi_1 d\xi d\tau + \\
& + a_3 [t - (r-1)h] \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r(\xi_1) d\xi_1 d\xi + \int_{(r-1)h}^t \tilde{f}(x, \tau) d\tau. \quad (1.34)
\end{aligned}$$

(1.34)-те  $t \rightarrow rh - 0$  ұмтылғанда шекке көшіп, (1.32), (1.33)-ке  $\lim_{t \rightarrow Nh-0} \tilde{w}_N(x, t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow sh-0} \tilde{w}_s(x, t)$  орнына қойып және (1.32) теңдеуінің екі жағын да  $h > 0$  қадамына көбейтіп келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{aligned}
Q(h)\lambda(x) + S(h) \int_0^x \int_0^\xi \lambda(\xi_1) d\xi_1 d\xi = & -W_1(x, h, \tilde{w}) - \\
-W_2\left(x, h, \int_0^x \frac{\partial \tilde{w}(\xi, [t])}{\partial \tau} d\xi\right) - & W_3\left(x, h, \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}(\xi_1, [t]) d\xi_1 d\xi\right) - F(x, h), \quad (1.35)
\end{aligned}$$

мұнда  $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_N(x))'$ ,

$$\begin{aligned}
W_2\left(x, h, \int_0^x \frac{\partial \tilde{w}(\xi, [t])}{\partial t} d\xi\right) = & \left( hb_2 a_2 \int_{(N-1)h}^{Nh} \int_0^x \frac{\partial \tilde{w}_N(\xi, \tau)}{\partial \tau} d\xi d\tau + \right. \\
& + hb_3 \int_0^x \frac{\partial \tilde{w}_1(\xi, t)}{\partial t} d\xi - hb_4 \int_0^x \lim_{t \rightarrow Nh-0} \frac{\partial \tilde{w}_N(\xi, t)}{\partial t} d\xi, \\
& \left. a_2 \int_0^h \int_0^x \frac{\partial \tilde{w}_1(\xi, \tau)}{\partial \tau} d\xi d\tau, \dots, a_2 \int_{(N-2)h}^{(N-1)h} \int_0^x \frac{\partial \tilde{w}_{N-1}(\xi, \tau)}{\partial \tau} d\xi d\tau \right)',
\end{aligned}$$

Қалған қосылғыштары 1.2-ішкі бөлімдегідей анықталады.

Бастапқы жуықтау ретінде  $\tilde{w}_r(x, t) = 0$  деп алып, (1.31)-(1.33) шеттік есебінің шешімін  $\left\{ \frac{\partial \tilde{w}_r^{(k)}(x, t)}{\partial t}, \lambda_r^{(k)}(x), \tilde{w}_r^{(k)}(x, t) \right\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  үштіктер тізбегінің шегі ретінде табамыз. Бұл үштіктер келесі алгоритм бойынша анықталады:

*0-қадам.*  $Q(h)$  матрицасының кері матрицасы бар деп болжап,  $\tilde{w}_r(x, t) = 0$  деп алып, (1.30), (1.31) есебінен және (1.35) теңдеулер жүйесінен  $\frac{\partial \tilde{w}_r^{(0)}(x, t)}{\partial t}, \lambda_r^{(0)}(x)$ ,  $r = \overline{1, N}$  табамыз. (1.31) теңдеуінен  $\tilde{w}_r^{(0)}(x, t)$ ,  $r = \overline{1, N}$  анықтаймыз.

1-қадам.  $\tilde{w}_r(x, t) = \tilde{w}_r^{(0)}(x, t)$  деп алып, (1.30), (1.31) есебінен және (1.35) теңдеулер жүйесінен  $\frac{\partial \tilde{w}_r^{(1)}(x, t)}{\partial t}, \lambda_r^{(1)}(x), r = \overline{1, N}$  табамыз. (1.31) теңдеуінен  $\tilde{w}_r^{(1)}(x, t), r = \overline{1, N}$ , анықтаймыз.

Үдерісті жалғастыра отырып,  $k$ -ші қадамда  $\left\{ \frac{\partial \tilde{w}_r^{(k)}(x, t)}{\partial t}, \lambda_r^{(k)}(x), \tilde{w}_r^{(k)}(x, t) \right\}, k = 1, 2, \dots$  үштіктер жүйесін аламыз.

Ұсынылған алгоритмнің жүзеге асырылуы мен жинақталуын қамтамасыз ететін жеткілікті шарттарды, сондай-ақ, дәл және жуық шешімдердің арасындағы айырымды келесі теоремада анықтайды:

4-теорема. Қандай да бір  $h > 0: Nh = T, N = 1, 2, \dots$ , қадамы үшін  $(N \times N)$  өлшемді  $Q(h)$  матрицасының кері матрицасы бар болсын және келесі теңсіздіктер орындалсын:

$$1) \| [Q(h)]^{-1} \| < \gamma(h), \quad 2) q(h) < 1,$$

мұнда

$$q(h) = \max_{x \in [0, \omega]} \| q(x, h) \|, \quad q(x, h) = h\chi(x) + ha_2 \int_0^x \int_0^\xi e^{a_2 \frac{\xi^2}{2}} \chi(\xi) d\xi,$$

$$\chi(x) = a_1 [1 + \beta(x)\delta(x)] + a_3 \left[ \frac{x^2}{2!} + \int_0^x \int_0^\xi \beta(\xi_1)\delta(\xi_1) d\xi_1 d\xi \right],$$

$$\beta(x) = h\gamma(h) \exp \left( h\gamma(h)\rho_0 \frac{x^2}{2!} + h\gamma(h)\rho_2 \int_0^x e^{a_2 \xi} \left( a_1 + a_3 \frac{\xi^2}{2!} \right) d\xi \right),$$

$$\delta(x) = \rho_1 + \rho_2 a_1 \int_0^x \int_0^\xi e^{a_2 \xi} d\xi_1 d\xi + \rho_2 a_3 \int_0^x e^{a_2 \xi} \frac{\xi^2}{2!} d\xi + \rho_3 \frac{x^2}{2!},$$

$$\rho_0 = b_5 + b_6 + a_3 \max\{hb_2, 1\}, \quad \rho_1 = a_1 \max\{hb_2, 1\},$$

$$\rho_2 = b_3 + b_4 + a_2 \max\{hb_2, 1\}, \quad \rho_3 = b_6 + a_3 \max\{hb_2, 1\}.$$

Онда (1.30)-(1.33) есебінің жалғыз  $\{\tilde{w}^*(x, [t]), \lambda^*(x)\}$  шешімі бар және келесі бағалаулар орындалады:

$$\begin{aligned} & \text{а) } \|\tilde{w}^* - \tilde{w}^{(k)}\|_1 \leq \\ & \leq h \sum_{j=k+1}^{\infty} [q(h)]^j \max_{x \in [0, \omega]} \|q_0(x)\| \max \left\{ \max_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{\theta}(x)\|, \max_{(x, t) \in \Omega} \|\tilde{f}(x, t)\| \right\}, \end{aligned}$$

$$\text{ә) } \|\lambda^* - \lambda^{(k)}\|_2 \leq$$

$$\leq \max_{x \in [0, \omega]} \|\beta(x)\delta(x)\| h \sum_{j=k}^{\infty} [q(h)]^j \max_{x \in [0, \omega]} \|q_0(x)\| \max \left\{ \max_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{\theta}(x)\|, \max_{(x,t) \in \Omega} \|\tilde{f}(x,t)\| \right\},$$

мұнда

$$q_0(x) = a_1 \beta(x) \delta_0(x) + a_2 \int_0^x e^{a_2 \frac{\xi^2}{2}} \chi_0(\xi) d\xi + a_3 \int_0^x \int_0^\xi \beta(\xi_1) \delta_0(\xi_1) d\xi_1 d\xi,$$

$$\chi_0(x) = a_1 \beta(x) \delta_0(x) + a_3 \int_0^x \int_0^\xi \beta(\xi_1) \delta_0(\xi_1) d\xi_1 d\xi + 1,$$

$$\delta_0(x) = \rho_2 \int_0^x e^{a_2(\xi)\xi} d\xi + h + h \max\{hb_2, 1\}.$$

4-теорема 1.2-ішкі бөлімдегі 1-теоремаға ұқсас дәлелденеді.

*5-теорема.* 4-теореманың шарттары орындалсын. Онда берілген есептің  $u^*(x, t)$  жалғыз шешімі бар және келесі бағалау орындалады:

$$\|u^* - u^{(k)}\|_1 \leq M(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|q_0(x)\| \max \left\{ \max_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{\theta}(x)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\tilde{f}(x, t)\| \right\},$$

мұнда  $M(h) = h \sum_{j=k+1}^{\infty} [q(h)]^j + h \max_{x \in [0, \omega]} \|\beta(x)\delta(x)\| \sum_{j=k+1}^{\infty} [q(h)]^j$ .

## 2 ҮШІНШІ РЕТТІ СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН БЕЙЛОКАЛ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІЛУІ

### 2.1 Сызықтық емес псевдопараболалық теңдеу үшін бейлокал шеттік есептің қойылымы

$\Omega = [0, \omega] \times [0, T]$  облысында келесі бейлокал шеттік есеп берілсін:

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = f\left(x, t, u(x,t), \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} b_1 \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 u(x, T)}{\partial x^2} + b_3 \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} + b_4 \frac{\partial u(x, T)}{\partial t} + \\ + b_5 u(x, 0) + b_6 u(x, T) = \theta(x), \quad x \in [0, \omega], \end{aligned} \quad (2.4)$$

мұнда  $f: \Omega \times R \times R \times R \rightarrow R$  үзіліссіз,  $\theta(x)$  функциясы  $[0, \omega]$  аралығында үзіліссіз,  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  функциялары  $[0, T]$  аралығында үзіліссіз дифференциалданады,  $b_j - \text{const}$ ,  $j = \overline{1, 6}$ .

Дербес  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \in C(\Omega, R)$ ,  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in C(\Omega, R)$ ,  $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \in C(\Omega, R)$ ,  $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \in C(\Omega, R)$ ,  $\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \in C(\Omega, R)$  туындылары бар  $u(x, t) \in C(\Omega, R)$  функциясы (2.1)-(2.4) есебінің шешімі деп аталады, егер де барлық  $(x, t) \in \Omega$  үшін (2.1) жүйесін және (2.2)-(2.4) шеттік шарттарын қанағаттандырса.

(2.1)-(2.4) есебінің шешімін табу үшін  $w(x, t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$  функциясын енгіземіз, онда

$$u(x, t) = \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi w(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi,$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \varphi'(t) + \psi'(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial w(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi,$$

және (2.1)-(2.4) есебін келесі түрде жазамыз:

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = f\left(x, t, \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi w(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi,\right.$$

$$\varphi'(t) + \psi'(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial w(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi, w(x, t) \Big) \quad (2.5)$$

$$b_1 w(x, 0) + b_2 w(x, T) + b_3 \int_0^x \frac{\partial w(\xi, 0)}{\partial t} d\xi + b_4 \int_0^T \frac{\partial w(\xi, T)}{d\xi} d\xi + \\ + b_5 \int_0^x \int_0^\xi w(\xi_1, 0) d\xi_1 d\xi + b_6 \int_0^x \int_0^\xi w(\xi_1, T) d\xi_1 d\xi = \tilde{\theta}(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (2.6)$$

мұнда  $\tilde{\theta}(x) = \theta(x) + b_3(\varphi'(0) + \psi'(0)x) + b_4(\varphi'(T) + \psi'(T)x) + b_5(\varphi(0) + \psi(0)x) + b_6(\varphi(T) + \psi(T)x)$ .

(2.1)-(2.4) және (2.5), (2.6) есептері келесі мағынада эквивалентті: егер  $u(x, t)$  функциясы (2.1)-(2.4) есебінің шешімі болса, онда  $w(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$  функциясы (2.5), (2.6) сызықтық емес теңдеу үшін бейлокал шеттік есептің шешімі болады. Егер  $w(x, t)$  функциясы (2.5), (2.6) есебінің шешімі болса, онда  $u(x, t) = \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi w(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi$  функциясы үшінші ретті (2.1)-(2.4) бейлокал шеттік есебінің шешімі болып табылады.

$h > 0: Nh = T$  қадамы бойынша  $[0, T) = \bigcup_{r=1}^N [(r-1)h, rh)$ ,  $N = 1, 2, \dots$  бөліктеуін жүргіземіз. Бұл жағдайда  $\Omega$  облысы  $N$  бөлікке бөлінеді.  $w_r(x, t)$  арқылы  $w(x, t)$  функциясының  $\Omega_r = [0, \omega] \times [(r-1)h, rh)$ ,  $r = \overline{1, N}$ , ішкі облысындағы мәнін белгілейміз. Сонда (2.5), (2.6) есебі келесі шеттік есепке пара-пар болады:

$$\frac{\partial w_r(x, t)}{\partial t} = f \left( x, t, \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi w_r(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi, \right. \\ \left. \varphi'(t) + \psi'(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial w_r(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi, w_r(x, t) \right) \quad (2.7)$$

$$b_1 w_1(x, 0) + b_2 \lim_{t \rightarrow T-0} w_N(x, t) + b_3 \int_0^x \frac{\partial w_1(\xi, 0)}{\partial t} d\xi + b_4 \lim_{t \rightarrow T-0} \int_0^x \frac{\partial w_N(\xi, t)}{\partial t} d\xi + \\ + b_5 \int_0^x \int_0^\xi w_1(\xi_1, 0) d\xi_1 d\xi + b_6 \int_0^x \int_0^\xi \lim_{t \rightarrow T-0} w_N(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi = \tilde{\theta}(x), \quad x \in [0, \omega] \quad (2.8)$$

$$\lim_{t \rightarrow sh-0} w_s(x, t) = w_{s+1}(x, sh), \quad s = \overline{1, N-1}, \quad (2.9)$$

мұндағы (2.9) – бөліктеудің ішкі сызықтарындағы функцияның үзіліссіздік шарты.

(2.7)-(2.9) есебінің шешімі  $w^*(x, [t]) = (w_1^*(x, t), w_2^*(x, t), \dots, w_N^*(x, t))' \in C(\Omega_r, R^N)$  функциялар жүйесі болып табылады.  $w_r^*(x, t)$  функциялары барлық  $(x, t) \in \Omega_r$ ,  $r = \overline{1, N}$ , үшін  $\Omega_r$  облысында  $t$  бойынша үзіліссіз және шенелген

дербес туындылары бар және  $\lim_{t \rightarrow T-0} w_N(x, t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow sh-0} w_s(x, t)$  мәндері үшін (2.8), (2.9) теңдектері орындалады.

(2.5), (2.6) және (2.7)-(2.9) есептері пара-пар. Олардың пара-парлығы (2.1)-(2.4) және (2.5), (2.6) есептерінің пара-парлығына ұқсас дәлелденеді.

(2.7)-(2.9) есебінде  $\lambda_r(x) = w_r(x, (r-1)h)$  белгілеуін енгізіп

$$\tilde{w}_r(x, t) = w_r(x, t) - \lambda_r(x), \quad r = \overline{1, N},$$

алмастыруын жасаймыз.  $\lambda_r(x)$  белгісіз функциялары бар пара-пар бастапқы шеттік есебін аламыз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}_r(x, t)}{\partial t} = f \left( x, t, \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_r(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r(\xi_1) d\xi_1 d\xi, \right. \\ \left. \varphi'(t) + \psi'(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_r(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi, \tilde{w}_r(x, t) + \lambda_r(x) \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\tilde{w}_r(x, (r-1)h) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} b_1 \lambda_1(x) + b_2 \lambda_N(x) + b_2 \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{w}_N(x, t) + \\ + b_3 \int_0^x \frac{\partial \tilde{w}_1(\xi, 0)}{\partial t} d\xi + b_4 \lim_{t \rightarrow T-0} \int_0^x \frac{\partial \tilde{w}_N(\xi, t)}{\partial t} d\xi + b_5 \int_0^x \int_0^\xi \lambda_1(\xi_1) d\xi_1 d\xi + \\ + b_6 \int_0^x \int_0^\xi \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{w}_N(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + b_6 \int_0^x \int_0^\xi \lambda_N(\xi_1) d\xi_1 d\xi = \tilde{\theta}(x), \quad x \in [0, \omega], \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\lambda_s(x) + \lim_{t \rightarrow sh-0} \tilde{w}_s(x, t) = \lambda_{s+1}(x), \quad x \in [0, \omega], \quad s = \overline{1, N-1}. \quad (2.13)$$

Егер  $\{\tilde{w}^*(x, [t]), \lambda^*(x)\}$  функциялар жұбы (2.10)-(2.13) есебінің шешімі болса, онда  $w^*(x, t) = \lambda_r^*(x) + \tilde{w}_r^*(x, t)$ ,  $r = \overline{1, N}$ ,  $w^*(x, T) = \lambda_N^*(x) + \lim_{t \rightarrow Nh-0} \tilde{w}_N^*(x, t)$  теңдіктерімен анықталатын  $w^*(x, t)$  функциясы (2.5), (2.6) интегралды-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық емес шеттік есептің шешімі болады.

$C(\Omega_r, R^N)$  (сәйкесінше,  $C([0, \omega], R^N)$ ) арқылы  $\Omega_r$ ,  $r = \overline{1, N}$ , облысында үзіліссіз  $\tilde{w}_r: \Omega_r \rightarrow R^N$  ( $\lambda_r: [0, \omega] \rightarrow R^N$ ) функциялар кеңістігін белгілейміз. Кеңістік нормасы:  $\|\tilde{w}\|_1 = \max_{r=\overline{1, N}} \sup_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{w}_r(x, t)\|$ ,  $\|\lambda\|_2 = \max_{r=\overline{1, N}} \sup_{x \in [0, \omega]} \|\lambda_r(x)\|$ .

(2.10), (2.11) есебі  $\lambda_r(x)$ -тің бекітілген мәндерінде интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін бірпараметрлі Коши есебі болып табылады және келесі сызықтық емес интегралдық теңдеуге пара-пар:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_r(x, t) = & \int_{(r-1)h}^t f \left( x, \tau, \varphi(\tau) + \psi(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_r(\xi_1, \tau) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r(\xi_1) d\xi_1 d\xi, \right. \\ & \left. \varphi'(\tau) + \psi'(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_r(\xi_1, \tau)}{\partial t} d\xi_1 d\xi, \tilde{w}_r(x, \tau) + \lambda_r(x) \right) d\tau. \end{aligned} \quad (2.14)$$

(2.14)-теңдеуде  $t \rightarrow rh - 0$  ұмтылғанда шекке көшіп, (2.12), (2.13)-те  $\lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{w}_N(x, t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow sh-0} \tilde{w}_s(x, t)$  орнына оған сәйкес оң жақ бөліктерін қойып, (2.12)-теңдеудің екі жағын да  $h > 0$  қадамына көбейтіп,  $\lambda_r(x)$ ,  $r = \overline{1, N}$ , белгісіз функцияларынан тәуелді келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{aligned} & hb_1 \lambda_1(x) + hb_2 \lambda_N(x) + \\ & + hb_2 \int_{(N-1)h}^{Nh} f \left( x, \tau, \varphi(\tau) + \psi(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_N(\xi_1, \tau) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_N(\xi_1) d\xi_1 d\xi, \right. \\ & \left. \varphi'(\tau) + \psi'(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_N(\xi_1, \tau)}{\partial t} d\xi_1 d\xi, \tilde{w}_N(x, \tau) + \lambda_N(x) \right) d\tau + \\ & + hb_3 \int_0^x \frac{\partial \tilde{w}_1(\xi, 0)}{\partial t} d\xi + hb_4 \lim_{t \rightarrow T-0} \int_0^x \frac{\partial \tilde{w}_N(\xi, t)}{\partial t} d\xi + hb_5 \int_0^x \int_0^\xi \lambda_1(\xi_1) d\xi_1 d\xi + \\ & + hb_6 \lim_{t \rightarrow T-0} \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_N(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + hb_6 \int_0^x \int_0^\xi \lambda_N(\xi_1) d\xi_1 d\xi = h\tilde{\theta}(x), \quad x \in [0, \omega], \\ & \lambda_s(x) + \int_{(s-1)h}^{sh} f \left( x, \tau, \varphi(\tau) + \psi(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_s(\xi_1, \tau) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_s(\xi_1) d\xi_1 d\xi, \right. \\ & \left. \varphi'(\tau) + \psi'(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_s(\xi_1, \tau)}{\partial t} d\xi_1 d\xi, \tilde{w}_s(x, \tau) + \lambda_s(x) \right) d\tau - \lambda_{s+1}(x) = 0, \end{aligned}$$

мұнда  $x \in [0, \omega]$ ,  $s = \overline{1, N-1}$ . Бұл теңдеулер жүйесін қысқаша келесі түрде жазуға болады:

$$Q_h(x, \lambda(x), \tilde{w}(x, [\cdot])) = 0. \quad (2.15)$$

$\{\lambda_r(x), \tilde{w}_r(x, t)\}$ ,  $r = \overline{1, N}$ , функциялар жүйесін табу үшін  $f$  функциясы және  $h > 0$  бөліктеу қадамы арқылы анықталатын (2.15), (2.14) теңдеулерінен тұратын тұйықталған теңдеулер жүйесін аламыз.

$h > 0: Nh = T (N = 1, 2, \dots)$  қадамын және  $\lambda^{(0)}(x) = (\lambda_1^{(0)}(x), \lambda_2^{(0)}(x), \dots, \lambda_N^{(0)}(x))' \in C([0, \omega], R^N)$  вектор-функциясын таңдап,  $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x), r = \overline{1, N}$ , болған жағдайда, (2.10)-(2.13) есебінің шешімі  $\tilde{w}_r^{(0)}(x, t) \in \tilde{C}(\Omega_r, R), r = \overline{1, N}$ , бар болады.

$\lambda^{(0)}(x) \in C([0, \omega], R^N)$  жиынын  $G_0(f, x, h)$  деп белгілейміз, ал  $\lambda^{(0)}(x)$ -ке сәйкес (2.10)-(2.13) есебінің шешімдер жиынын  $\tilde{w}_r^{(0)}(x, [t]) = (\tilde{w}_1^{(0)}(x, t), \tilde{w}_2^{(0)}(x, t), \dots, \tilde{w}_N^{(0)}(x, t))'$  арқылы белгілейміз.

$\lambda^{(0)}(x) \in G_0(f, x, h), \tilde{w}^{(0)}(x, [t])$  функцияларын және  $\phi_1 > 0, \phi_2 > 0$  сандарын алып, келесі жиындарды құрамыз:

$$S(\lambda^{(0)}(x), \phi_1) = \{(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_N(x))' \in C([0, \omega], R^N): \|\lambda_r(x) - \lambda_r^{(0)}(x)\| < \phi_1, r = \overline{1, N}\},$$

$$S(\tilde{w}^{(0)}(x, [t]), \phi_1 \phi_2) = \{(\tilde{w}_1(x, t), \tilde{w}_2(x, t), \dots, \tilde{w}_N(x, t))', \tilde{w}_r(x, t) \in C(\Omega_r, R^N):$$

$$\|\tilde{w}_r(x, t) - \tilde{w}_r^{(0)}(x, t)\| < \phi_1 \phi_2, (x, t) \in \Omega_r, r = \overline{1, N}\},$$

$$G^0(\phi_1, \phi_2) = \{(x, t, w): (x, t) \in \Omega,$$

$$\|w - \lambda_r^{(0)}(x) - \tilde{w}_r^{(0)}(x, t)\| < \phi_1(1 + \phi_2), (x, t) \in \Omega_r, r = \overline{1, N},$$

$$\|w - \lambda_N^{(0)}(x) - \lim_{t \rightarrow T} \tilde{w}_N^{(0)}(x, t)\| < \phi_1(1 + \phi_2), t = T\}.$$

$U(f, L_1, L_2, L_3, x, h)$  арқылы  $(\lambda^{(0)}(x), \tilde{w}_r^{(0)}(x, [t]), u^{(0)}(x, [t]), \frac{\partial u^{(0)}(x, [t])}{\partial t}, \phi_1, \phi_2)$  функциялар жиынтығын белгілейміз. Бұл жиынтықта  $f(x, t, u, u_t, w)$  функциясы  $G^0(\phi_1, \phi_2)$  жиынында  $f'_w(x, t, u, u_t, w), f'_u(x, t, u, u_t, w), f'_{u_t}(x, t, u, u_t, w)$  дербес туындылары бар және

$$\|f'_w(x, t, u, u_t, w)\| \leq L_1, \|f'_{u_t}(x, t, u, u_t, w)\| \leq L_2, \|f'_u(x, t, u, u_t, w)\| \leq L_3,$$

мұнда  $L_1, L_2, L_3 - const$ .

$\{\lambda_r(x), \tilde{w}_r(x, t)\}, r = \overline{1, N}$ , жүйесі бойынша  $\{\lambda(x), \tilde{w}(x, [t])\}$  жұбын құрамыз, мұндағы

$$\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_N(x))',$$

$$\tilde{w}(x, [t]) = (\tilde{w}_1(x, t), \tilde{w}_2(x, t), \dots, \tilde{w}_N(x, t))'.$$

(2.10)-(2.13) есебінің бастапқы жуықтауы ретінде  $\tilde{w}^{(0)}(x, [t])$  функциясын алып, төмендегі алгоритм бойынша тізбекті жуықтауларды құрамыз:

*1-қадам.*  $\tilde{w}_r(x, t) = \tilde{w}_r^{(0)}(x, t)$  деп алып, (2.10) теңдеуі мен (2.15) теңдеулер жүйесінен  $\frac{\partial \tilde{w}_r^{(1)}(x, t)}{\partial t}, \lambda_r^{(1)}(x), r = \overline{1, N}$ , функцияларын табамыз. (2.14) интегралдық теңдеуден  $\tilde{w}_r^{(1)}(x, t)$  функциясы анықталады.

Үдерісті жалғастыра отырып,  $k$ -шы қадамда  $\left\{ \frac{\partial \tilde{w}_r^{(k)}(x,t)}{\partial t}, \lambda_r^{(k)}(x), \tilde{w}_r^{(k)}(x,t) \right\}$  функциялар үштігінен тұратын жүйе алынады.

Ұсынылған алгоритмнің жүзеге асырылуы, жинақтылығы және функционалдық параметрлері бар (2.10)–(2.13) көпсіпатты шеттік есептің шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары келесі теоремада келтірілген.

## 2.2 Сызықтық емес псевдопараболалық тендеу үшін бейлокал шеттік есептің «оқшауланған» шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары

*6-теорема.* Барлық  $(x, \lambda(x), \tilde{w}(x, [\cdot]))$  үшін  $\frac{\partial Q_h(x, \lambda(x), \tilde{w}(x, [\cdot]))}{\partial \lambda}$  Якоби матрицасына кері матрицасы болатындай  $h > 0: Nh = T$ , ( $N = 1, 2, \dots$ ) қадамы,  $(\lambda^{(0)}(x), \tilde{w}_r^{(0)}(x, [t]), \phi_1, \phi_2) \in U(f, L_1, L_2, L_3, x, h)$  бар болсын, мұндағы  $x \in [0, \omega]$ ,  $\{\lambda(x), \tilde{w}(x, [t])\} \in S(\lambda^{(0)}(x), \phi_1) \times S(\tilde{w}^{(0)}(x, [t]), \phi_1 \phi_2)$  және келесі шарттар орындалсын:

- 1)  $\left\| \left[ \frac{\partial Q_h(x, \lambda(x), \tilde{w}(x, [\cdot]))}{\partial \lambda} \right]^{-1} \right\| \leq \tilde{\gamma}(h)$ ,
- 2)  $\tilde{q}(h) = h\mu \left( 1 + L_2 \int_0^\omega \int_0^x e^{L_2 \frac{\xi^2}{2}} d\xi dx \right) < 1$ ,
- 3)  $\frac{[h\tilde{\gamma}(h)]^2}{1-\tilde{q}(h)} \max_{x \in [0, \omega]} \|P(x)\| \max_{x \in [0, \omega]} \|P_0(x)\| \max_{x \in [0, \omega]} \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot]) \right) \right\| +$   
 $+ \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{w}^{(0)}(\bar{x}, [\cdot]) \right) \right\| < \phi_1$ ,
- 4)  $\frac{h}{1-\tilde{q}(h)} \max_{x \in [0, \omega]} \|P_0(x)\| < \phi_2$ ,

мұнда  $\mu = e^{L_2 \frac{\omega^2}{2!}} \left( L_3 \frac{\omega^2}{2} + L_1 \right) \left( 1 + h\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|P(x)\| \right)$ ,

$$P_0(x) = \left( L_3 \frac{x^2}{2} + L_2 \int_0^x \int_0^\xi e^{L_2 \frac{\xi_1^2}{2}} \left( L_3 \frac{\xi_1^2}{2} + L_1 \right) d\xi_1 d\xi + L_1 \right),$$

$$P(x) = \left( P_1 + \tilde{P}_2(x) + P_3 \frac{x^2}{2!} \right) e^{h\tilde{\gamma}(h)\tilde{P}_2(x)},$$

$$P_1 = L_1 \max\{hb_2, 1\}, P_2 = L_3 \max\{hb_2, 1\} + hb_3 + hb_4,$$

$$P_3 = L_2 \max\{hb_2, 1\} + hb_5 + hb_6, \tilde{P}_2(x) = P_2 \int_0^x \int_0^\xi e^{\frac{L_2 \xi_1^2}{2}} \left( L_3 \frac{\xi_1^2}{2!} + L_1 \right) d\xi_1 d\xi.$$

Онда осы алгоритм арқылы анықталған  $\{\lambda^{(k)}(x), \tilde{w}_r^{(k)}(x, [t])\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , тізбек  $S(\lambda^{(0)}(x), \phi_1) \times S(\tilde{w}^{(0)}(x, [t]), \phi_1 \phi_2)$  жиынында (2.10)–(2.13) есебінің шешімі  $(\lambda^*(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [t]))$  функцияларына жинақталады және келесі бағалаулар орындалады:

$$\begin{aligned}
& \text{a) } \|\lambda^* - \lambda^{(k+1)}\|_2 \leq \\
& \leq [h\tilde{\gamma}(h)]^2 \max_{x \in [0, \omega]} \|P_0(x)\| \max_{x \in [0, \omega]} \|P(x)\| \frac{[\tilde{q}(h)]^k}{1 - \tilde{q}(h)} \max_{x \in [0, \omega]} \|Q_h(x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot]))\|, \\
& \text{ә) } \|\tilde{w}^* - \tilde{w}^{(k+1)}\|_1 \leq \\
& \leq \frac{[\tilde{q}(h)]^{k+1}}{1 - \tilde{q}(h)} h\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|P_0(x)\| \max_{x \in [0, \omega]} \|Q_h(x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot]))\|.
\end{aligned}$$

Сонымен қатар, (2.10)-(2.13) есебінің кез келген  $(\lambda(x), \tilde{w}(x, [t]))$  шешімі  $S(\lambda^{(0)}(x), \phi_1) \times S(\tilde{w}^{(0)}(x, [t]), \phi_1 \phi_2)$  жиынында оқшауланған.

*Дәлелдеу:*  $\frac{\partial \tilde{w}_r^{(1)}(x, t)}{\partial t}, \frac{\partial \tilde{w}_r^{(0)}(x, t)}{\partial t}, r = \overline{1, N}$ , функциялары келесі қатынастар арқылы анықталады:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{w}_r^{(1)}(x, t)}{\partial t} = f & \left( x, t, \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r^{(1)}(\xi_1) d\xi_1 d\xi, \right. \\
& \left. \varphi'(t) + \psi'(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_r^{(1)}(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi, \tilde{w}_r^{(0)}(x, t) + \lambda_r^{(1)}(x) \right)
\end{aligned}$$

және

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{w}_r^{(0)}(x, t)}{\partial t} = f & \left( x, t, \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r^{(0)}(\xi_1) d\xi_1 d\xi, \right. \\
& \left. \varphi'(t) + \psi'(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi, \tilde{w}_r^{(0)}(x, t) + \lambda_r^{(0)}(x) \right).
\end{aligned}$$

Бұдан келесі бағалау орынды:

$$\begin{aligned}
& \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{w}_r^{(1)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}_r^{(0)}(x, t)}{\partial t} \right\| \leq \\
& \leq L_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \|\lambda_r^{(1)}(\xi_1) - \lambda_r^{(0)}(\xi_1)\| d\xi_1 d\xi + \\
& + L_2 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{w}_r^{(1)}(\xi_1, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, t)}{\partial t} \right\| d\xi_1 d\xi + L_1 \max_{r=1, N} \|\lambda_r^{(1)}(x) - \lambda_r^{(0)}(x)\|.
\end{aligned}$$

Еселі интегралдары бар сызықтық-интегралдық теңсіздікті [103, с. 58] қолданып

$$\begin{aligned} & \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{w}_r^{(1)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}_r^{(0)}(x, t)}{\partial t} \right\| \leq \\ & \leq e^{L_2 \frac{x^2}{2}} \left( L_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1,N} \left\| \lambda_r^{(1)}(\xi_1) - \lambda_r^{(0)}(\xi_1) \right\| d\xi_1 d\xi + L_1 \max_{r=1,N} \left\| \lambda_r^{(1)}(x) - \lambda_r^{(0)}(x) \right\| \right) \quad (2.17) \end{aligned}$$

$\tilde{w}_r^{(1)}(x, t)$ ,  $\tilde{w}_r^{(0)}(x, t)$ ,  $r = \overline{1, N}$ , функциялары мына қатынастар арқылы анықталады:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_r^{(1)}(x, t) = & \int_{(r-1)h}^t f \left( x, \tau, \varphi(\tau) + \psi(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, \tau) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r^{(1)}(\xi_1) d\xi_1 d\xi, \right. \\ & \left. \varphi'(\tau) + \psi'(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_r^{(1)}(\xi_1, \tau)}{\partial t} d\xi_1 d\xi, \tilde{w}_r^{(0)}(x, \tau) + \lambda_r^{(1)}(x) \right) d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_r^{(0)}(x, t) = & \int_{(r-1)h}^t f \left( x, t, \varphi(\tau) + \psi(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, \tau) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r^{(0)}(\xi_1) d\xi_1 d\xi, \right. \\ & \left. \varphi'(\tau) + \psi'(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, \tau)}{\partial t} d\xi_1 d\xi, \tilde{w}_r^{(0)}(x, \tau) + \lambda_r^{(0)}(x) \right) d\tau, \end{aligned}$$

келесі бағалау орынды:

$$\begin{aligned} & \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(1)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(0)}(x, t) \right\| \leq \\ & \leq hL_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1,N} \left\| \lambda_r^{(1)}(\xi_1) - \lambda_r^{(0)}(\xi_1) \right\| d\xi_1 d\xi + \\ & + hL_2 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{w}_r^{(1)}(\xi_1, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, t)}{\partial t} \right\| d\xi_1 d\xi + \\ & + hL_1 \max_{r=1,N} \left\| \lambda_r^{(1)}(x) - \lambda_r^{(0)}(x) \right\|. \quad (2.18) \end{aligned}$$

1-теореманың 3)-теңсіздігі бойынша келесі теңсіздіктерді қанағаттандыратын

$$\varepsilon_0 \gamma(h) < 1, \frac{\tilde{\gamma}(h)}{1 - \varepsilon_0 \tilde{\gamma}(h)} \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot]) \right) \right\| < \phi_1,$$

$\varepsilon_0 > 0$  саны бар. Ал  $\frac{\partial Q_h(x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot]))}{\partial \lambda}$  Якоби матрицасы  $S(\lambda^{(0)}(x), \phi_1)$  облысында бірқалыпты үзіліссіз және  $\varepsilon_0 > 0$  саны үшін

$$\left\| \frac{\partial Q_h(x, \lambda(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot]))}{\partial \lambda} - \frac{\partial Q_h(x, \hat{\lambda}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot]))}{\partial \lambda} \right\| < \varepsilon_0,$$

болатындай  $\delta_0 \in (0, \frac{\phi_1}{2})$  саны табылады. Сондай-ақ,  $\lambda(x), \hat{\lambda}(x) \in S(\lambda^{(0)}(x), \phi_1)$  үшін  $\|\lambda(x) - \hat{\lambda}(x)\| < \delta_0$ ,  $x \in [0, \omega]$  теңсіздігі орындалады.

$$\alpha \geq \alpha_0 = \max \left\{ 1, \frac{\tilde{\gamma}(h)}{\delta_0} \left\| Q_h(x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot])) \right\| \right\}$$

санын таңдап,  $\lambda^{(1,0)}(x) = \lambda^{(0)}(x)$  итерациялық үдерісті құрамыз:

$$\begin{aligned} \lambda^{(1,m+1)}(x) &= \lambda^{(1,m)}(x) - \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{\partial Q_h(x, \lambda^{(1,m)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot]))}{\partial \lambda} \right]^{-1} \times \\ &\times Q_h(x, \lambda^{(1,m)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot])), \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

[104] әдебиеттен алынған 1-теорема бойынша (2.19) итерациялық үдерісі  $S(\lambda^{(0)}(x), \phi_1)$  жиынында  $Q_h(x, \lambda(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot])) = 0$  теңдеуінің оқшауланған шешімі  $\lambda^{(1)}(x)$  функциясына жинақталады және

$$\left\| \lambda_r^{(1)}(x) - \lambda_r^{(0)}(x) \right\| \leq \tilde{\gamma}(h) \left\| Q_h(x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot])) \right\| < \phi_1. \quad (2.20)$$

(2.20)-ны (2.18)-ге қойып келесіні аламыз:

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{w}_r^{(1)} - \tilde{w}_r^{(0)} \right\| &\leq h \max_{x \in [0, \omega]} \|p_0(x)\| \left\| \lambda_r^{(1)} - \lambda_r^{(0)} \right\|_2 \leq \\ &\leq h \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, X]} \|p_0(x)\| \max_{x \in [0, \omega]} \left\| Q_h(x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot])) \right\|. \end{aligned}$$

$\frac{\partial \tilde{w}_r^{(1)}(x, t)}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \tilde{w}_r^{(2)}(x, t)}{\partial t}$ ,  $r = \overline{1, N}$ , функциялары келесі қатынастардан анықталады:

$$\frac{\partial \tilde{w}_r^{(1)}(x, t)}{\partial t} = f \left( x, t, \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r^{(1)}(\xi_1) d\xi_1 d\xi, \right.$$

$$\varphi'(t) + \psi'(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_r^{(1)}(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi, \tilde{w}_r^{(0)}(x, t) + \lambda_r^{(1)}(x) \Bigg)$$

және

$$\frac{\partial \tilde{w}_r^{(2)}(x, t)}{\partial t} = f \left( x, t, \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_r^{(1)}(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r^{(2)}(\xi_1) d\xi_1 d\xi, \right. \\ \left. \varphi'(t) + \psi'(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_r^{(2)}(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi, \tilde{w}_r^{(1)}(x, t) + \lambda_r^{(2)}(x) \right).$$

Келесі бағалау орынды:

$$\begin{aligned} & \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{w}_r^{(2)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}_r^{(1)}(x, t)}{\partial t} \right\| \leq \\ & \leq L_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(1)}(\xi_1, t) - \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, t) \right\| d\xi_1 d\xi + \\ & \quad + L_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(2)}(\xi_1) - \lambda_r^{(1)}(\xi_1) \right\| d\xi_1 d\xi + \\ & \quad + L_2 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{w}_r^{(2)}(\xi_1, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}_r^{(1)}(\xi_1, t)}{\partial t} \right\| d\xi_1 d\xi + \\ & \quad + L_1 \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(1)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(0)}(x, t) \right\| + L_1 \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(1)}(x) - \lambda_r^{(0)}(x) \right\|. \end{aligned}$$

Еселі интегралдары бар сызықтық-интегралдық теңсіздікті [103, с. 58] қолданып келесіні аламыз:

$$\begin{aligned} & \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{w}_r^{(2)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}_r^{(1)}(x, t)}{\partial t} \right\| \leq \\ & \leq e^{L_2 \frac{x^2}{2}} \left( L_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(1)}(\xi_1, t) - \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, t) \right\| d\xi_1 d\xi + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + L_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(2)}(\xi_1) - \lambda_r^{(1)}(\xi_1) \right\| d\xi_1 d\xi + \\
& + L_1 \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(1)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(0)}(x, t) \right\| + L_1 \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(2)}(x) - \lambda_r^{(1)}(x) \right\| \Big). \quad (2.21)
\end{aligned}$$

$Q_h(x, \lambda(x), \tilde{w}^{(1)}(x, [\cdot])) = 0$  операторының құрылымынан және  
 $Q_h(x, \lambda^{(1)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot])) = 0$  теңдігінен

$$\begin{aligned}
& \tilde{\gamma}(h) \left\| Q_h(x, \lambda^{(1)}(x), \tilde{w}^{(1)}(x, [\cdot])) \right\| = \\
& = \tilde{\gamma}(h) \left\| Q_h(x, \lambda^{(1)}(x), \tilde{w}^{(1)}(x, [\cdot])) - Q_h(x, \lambda^{(1)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot])) \right\| \leq \\
& \leq h\tilde{\gamma}(h) \left( P_1 \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(1)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(0)}(x, t) \right\| + \right. \\
& + P_2 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{w}_r^{(2)}(\xi_1, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}_r^{(1)}(\xi_1, t)}{\partial t} \right\| d\xi_1 d\xi + \\
& + P_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(1)}(\xi_1, t) - \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, t) \right\| d\xi_1 d\xi \Big) \leq \\
& \leq h\tilde{\gamma}(h) \left( P_1 \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(1)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(0)}(x, t) \right\| + \right. \\
& + P_2 \int_0^x \int_0^\xi e^{L_2 \frac{x^2}{2}} \left( L_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(1)}(\xi_1, t) - \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, t) \right\| d\xi_1 d\xi + \right. \\
& + L_1 \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(1)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(0)}(x, t) \right\| \Big) d\xi_1 d\xi + \\
& + P_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(1)}(\xi_1, t) - \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, t) \right\| d\xi_1 d\xi \Big) \leq \\
& \leq h\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \left( P_1 + P_2 \int_0^x \int_0^\xi e^{L_2 \frac{\xi_1^2}{2}} \left( L_3 \frac{\xi_1^2}{2} + L_1 \right) d\xi_1 d\xi + P_3 \frac{x^2}{2!} \right) \left\| \tilde{w}_r^{(1)} - \tilde{w}_r^{(0)} \right\|_1 \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq h\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \left( P_1 + \tilde{P}_2(x) + P_3 \frac{x^2}{2!} \right) \left\| \tilde{w}_r^{(1)} - \tilde{w}_r^{(0)} \right\|_1 \leq \\
&\leq h\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|P(x)\| \left\| \tilde{w}_r^{(1)} - \tilde{w}_r^{(0)} \right\|_1. \tag{2.22}
\end{aligned}$$

$\phi_{1,1} = \tilde{\gamma}(h) \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(1)}(x), \tilde{w}^{(1)}(x, [\cdot]) \right) \right\|$  деп алып және  $S(\lambda^{(1)}(\bar{x}), \phi_{1,1}) \in S(\lambda^{(0)}(\bar{x}), \phi_1)$  екенін көрсетеміз. Шынымен, егер

$$\left\| \lambda(x) - \lambda^{(1)}(x) \right\| < \phi_{1,1} = \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(1)}(x), \tilde{w}^{(1)}(x, [\cdot]) \right) \right\|$$

теңсіздігін және (2.22) мен

$$\left\| \lambda^{(1)}(x) - \lambda^{(0)}(x) \right\| \leq \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot]) \right) \right\|$$

теңсіздіктерін ескере отырып, келесіні аламыз:

$$\begin{aligned}
&\max_{r=1, N} \left\| \lambda_r(x) - \lambda_r^{(0)}(x) \right\| \leq \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r(x) - \lambda_r^{(1)}(x) \right\| + \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(1)}(x) - \lambda_r^{(0)}(x) \right\| \leq \\
&\leq h\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|P(x)\| \left\| \tilde{w}_r^{(1)} - \tilde{w}_r^{(0)} \right\|_1 + \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot]) \right) \right\| < \phi_1.
\end{aligned}$$

Теореманың шартынан  $Q_h \left( x, \lambda^{(1)}(x), \tilde{w}^{(1)}(x, [\cdot]) \right)$  операторы  $S(\lambda^{(1)}(\bar{x}), \phi_{1,1})$  облысында [104 с. 20-29] мақаладағы 1-теореманың барлық шарттарын қанағаттандырады. Сондықтан  $\lambda^{(2,0)}(x) = \lambda^{(2)}(x)$  итерациялық үдерісі:

$$\begin{aligned}
\lambda^{(2,m+1)}(x) &= \lambda^{(2,m)}(x) - \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{\partial Q_h \left( x, \lambda^{(2,m)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot]) \right)}{\partial \lambda} \right]^{-1} \times \\
&\times Q_h \left( x, \lambda^{(2,m)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot]) \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

$S(\lambda^{(1)}(x), \phi_{1,1})$  жиынында  $Q_h \left( x, \lambda(x), \tilde{w}^{(1)}(x, [\cdot]) \right) = 0$  тендеуінің окшауланған шешімі  $\lambda^{(1)}(x)$  функциясына жинақталады және

$$\left\| \lambda_r^{(2)}(x) - \lambda_r^{(1)}(x) \right\| \leq \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(1)}(x), \tilde{w}^{(1)}(x, [\cdot]) \right) \right\| < \phi_1. \tag{2.23}$$

(2.21) және (2.22)-ні (2.23)-ке қоямыз:

$$\left\| \lambda_r^{(2)}(x) - \lambda_r^{(1)}(x) \right\| \leq \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(2)}(x) - \lambda_r^{(1)}(x) \right\| \leq$$

$$\begin{aligned}
& \leq h\tilde{\gamma}(h) \left( P_1 \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(1)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(0)}(x, t) \right\| + \right. \\
& + P_2 \int_0^x \int_0^\xi e^{L_2 \frac{\xi_1^2}{2}} \left( L_3 \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(1)}(\xi_3, t) - \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_3, t) \right\| d\xi_3 d\xi_2 + \right. \\
& \quad \left. + L_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1,N} \left\| \lambda_r^{(2)}(\xi_3) - \lambda_r^{(1)}(\xi_3) \right\| d\xi_3 d\xi_2 + \right. \\
& + L_1 \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(1)}(\xi_1, t) - \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, t) \right\| + L_1 \max_{r=1,N} \left\| \lambda_r^{(2)}(\xi_1) - \lambda_r^{(1)}(\xi_1) \right\| \Big) d\xi_1 d\xi + \\
& \quad \left. + P_3(x) \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(1)}(\xi_1, t) - \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, t) \right\| d\xi_1 d\xi \right).
\end{aligned}$$

2-теоремадағы теңсіздікті қолданып келесіні аламыз:

$$\begin{aligned}
& \max_{r=1,N} \left\| \lambda_r^{(2)}(x) - \lambda_r^{(1)}(x) \right\| \leq \\
& \leq \exp \left( h\tilde{\gamma}(h) P_2 \int_0^x \int_0^\xi e^{L_2 \frac{\xi_1^2}{2}} \left( L_3 \frac{\xi_1^2}{2} + L_1 \right) d\xi_1 d\xi \right) \times \\
& \quad \times h\tilde{\gamma}(h) \left[ P_1 \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(1)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(0)}(x, t) \right\| + \right. \\
& + P_2 \int_0^x \int_0^\xi e^{L_2 \frac{\xi_1^2}{2}} \left( L_3 \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(1)}(\xi_3, t) - \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_3, t) \right\| d\xi_3 d\xi_2 + \right. \\
& \quad \left. + L_1 \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(1)}(\xi_1, t) - \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, t) \right\| \right) d\xi_1 d\xi + \\
& \quad \left. + P_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(1)}(\xi_1, t) - \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, t) \right\| d\xi_1 d\xi \right].
\end{aligned}$$

Осылайша,

$$\begin{aligned}
& \left\| \lambda_r^{(2)} - \lambda_r^{(1)} \right\|_2 \leq \\
& \leq h\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \left[ \left( P_1 + \tilde{P}_2(x) + P_3 \frac{x^2}{2!} \right) e^{h\tilde{\gamma}(h)\tilde{P}_2(x)} \right] \left\| \tilde{w}_r^{(1)} - \tilde{w}_r^{(0)} \right\|_1 \leq
\end{aligned}$$

$$\leq h\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|P(x)\| \left\| \tilde{w}_r^{(1)} - \tilde{w}_r^{(0)} \right\|_1. \quad (2.24)$$

(2.24)-ті (2.21)-ге қою арқылы

$$\left\| \frac{\partial \tilde{w}_r^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}_r^{(1)}}{\partial t} \right\|_1 \leq \mu \left\| \tilde{w}_r^{(1)} - \tilde{w}_r^{(0)} \right\|_1. \quad (2.25)$$

$\tilde{w}_r^{(2)}(x, t)$ ,  $\tilde{w}_r^{(1)}(x, t)$ ,  $r = \overline{1, N}$ , функциялары келесі қатынастар арқылы анықталады:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_r^{(2)}(x, t) = & \int_{(r-1)h}^t f \left( x, \tau, \varphi(\tau) + \psi(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_r^{(1)}(\xi_1, \tau) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r^{(2)}(\xi_1) d\xi_1 d\xi, \right. \\ & \left. \varphi'(\tau) + \psi'(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_r^{(2)}(\xi_1, \tau)}{\partial t} d\xi_1 d\xi, \tilde{w}_r^{(1)}(x, \tau) + \lambda_r^{(2)}(x) \right) d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_r^{(1)}(x, t) = & \int_{(r-1)h}^t f \left( x, \tau, \varphi(\tau) + \psi(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, \tau) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r^{(1)}(\xi_1) d\xi_1 d\xi, \right. \\ & \left. \varphi'(\tau) + \psi'(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{w}_r^{(1)}(\xi_1, \tau)}{\partial t} d\xi_1 d\xi, \tilde{w}_r^{(0)}(x, \tau) + \lambda_r^{(1)}(x) \right) d\tau, \end{aligned}$$

бұдан келесі бағалау орынды:

$$\begin{aligned} & \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(2)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(1)}(x, t) \right\| \leq \\ & \leq hL_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(1)}(\xi_1, t) - \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, t) \right\| d\xi_1 d\xi + \\ & \quad + hL_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(1)}(\xi_1) - \lambda_r^{(0)}(\xi_1) \right\| d\xi_1 d\xi + \\ & \quad + hL_2 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{w}_r^{(1)}(\xi_1, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}_r^{(0)}(\xi_1, t)}{\partial t} \right\| d\xi_1 d\xi + \\ & \quad + hL_1 \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{w}_r^{(1)}(x, t) - \tilde{w}_r^{(0)}(x, t) \right\| + L_1 \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(1)}(x) - \lambda_r^{(0)}(x) \right\|. \quad (2.26) \end{aligned}$$

(2.25) және (2.24)-ті (2.26)-ға қоя отырып

$$\left\| \tilde{w}_r^{(2)} - \tilde{w}_r^{(1)} \right\|_1 \leq \tilde{q}(h) \left\| \tilde{w}_r^{(1)} - \tilde{w}_r^{(0)} \right\|_1.$$

бағалауын аламыз.

Келесі бағалау орынды:

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{w}_r^{(2)} - \tilde{w}_r^{(0)} \right\|_1 &\leq [1 + \tilde{q}(h)] \left\| \tilde{w}_r^{(1)} - \tilde{w}_r^{(0)} \right\|_1 \leq \\ &\leq [1 + \tilde{q}(h)] h \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|P_0(x)\| \max_{x \in [0, \omega]} \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot]) \right) \right\| < \phi_1 \phi_2. \end{aligned}$$

$\left\{ \lambda_r^{(k)}(x), \tilde{w}_r^{(k)}(x, t) \right\} \in S(\lambda^{(0)}(x), \phi_1) \times S(\tilde{w}^{(0)}(x, [t]), \phi_1 \phi_2)$  жұбы анықталған деп болжаймыз. Бұдан келесі бағалаулар орындалады:

$$\left\| \tilde{w}_r^{(k+1)} - \tilde{w}_r^{(k)} \right\|_1 \leq [\tilde{q}(h)]^{k-1} \left\| \tilde{w}_r^{(1)} - \tilde{w}_r^{(0)} \right\|_1, \quad (2.27)$$

$$\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot]) \right) \right\| \leq h \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|P(x)\| \left\| \tilde{w}_r^{(k)} - \tilde{w}_r^{(k-1)} \right\|_1. \quad (2.28)$$

$\lambda^{(k+1)}(x)$  функционалдык параметрі бойынша  $(k+1)$ -ші жуықтауды  $Q_h \left( x, \lambda(x), \tilde{w}^{(k)}(x, [\cdot]) \right) = 0$  теңдеуінен табамыз. (2.22)-ні және  $Q_h \left( x, \lambda^{(k)}(x), \tilde{w}^{(k)}(x, [\cdot]) \right) = 0$  теңдеуін қолданып, келесі теңсіздіктің дұрыстығын анықтаймыз:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(k)}(x), \tilde{w}^{(k)}(x, [\cdot]) \right) \right\| &\leq \\ &\leq h \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|P(x)\| [\tilde{q}(h)]^{k-1} \left\| \tilde{w}_r^{(1)} - \tilde{w}_r^{(0)} \right\|_1. \end{aligned} \quad (2.29)$$

$\phi_k = \tilde{\gamma}(h) \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(k)}(x), \tilde{w}^{(k)}(x, [\cdot]) \right) \right\|$  деп алып,  $S(\lambda^{(k)}(\bar{x}), \phi_k) \subset S(\lambda^{(0)}(\bar{x}), \phi_k)$  екенін көрсетеміз. Шынымен, (2.27)-(2.29), 3) теңсіздіктерінен

$$\begin{aligned} \left\| \lambda - \lambda^{(0)} \right\|_2 &\leq \left\| \lambda - \lambda^{(k-1)} \right\|_2 + \left\| \lambda^{(k-1)} - \lambda^{(k-2)} \right\|_2 + \dots + \left\| \lambda^{(1)} - \lambda^{(0)} \right\|_2 \leq \\ &\leq \frac{h \tilde{\gamma}(h)}{1 - \tilde{q}(h)} \max_{x \in [0, \omega]} \|P(x)\| \left\| \tilde{w}^{(1)} - \tilde{w}^{(0)} \right\|_1 + \left\| \lambda^{(1)} - \lambda^{(0)} \right\|_2 \leq \\ &\leq h \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|P(x)\| \phi_2 + \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot]) \right) \right\| < \phi_1. \end{aligned}$$

$Q_h \left( x, \lambda(x), \tilde{w}^{(k)}(x, [\cdot]) \right)$  операторы  $S(\lambda^{(k)}(x), \phi_k)$  жиынында [104, с. 20-29] мақаладағы 1-теореманың барлық шарттарын қанағаттандыратындықтан,

$Q_h(x, \lambda(x), \tilde{w}^{(k)}(x, [\cdot])) = 0$  теңдеуінің  $S(\lambda^{(k)}(x), \phi_k)$  жиынында  $\lambda^{(k)}(x)$  шешімі бар және келесі бағалау орындалады:

$$\|\lambda_r(x) - \lambda_r^{(k)}(x)\|_2 \leq \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|Q_h(x, \lambda^{(k)}(x), \tilde{w}^{(k)}(x, [\cdot]))\|.$$

Біз келесі бағалауларды орнатамыз:

$$\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\|_2 \leq h\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|P(x)\| \|\tilde{w}^{(k)} - \tilde{w}^{(k-1)}\|_1, \quad (2.30)$$

$$\|\tilde{w}^{(k+1)} - \tilde{w}^{(k)}\|_1 \leq \tilde{q}(h) \|\tilde{w}^{(k)} - \tilde{w}^{(k-1)}\|_1. \quad (2.31)$$

(2.30), (2.31) және  $\tilde{q}(h) < 1$  теңсіздіктерінен  $\{\lambda_r^{(k)}(x), \tilde{w}^{(k)}(x, [t])\}$  тізбегі  $S(\lambda^{(0)}(x), \phi_1) \times S(\tilde{w}^{(0)}(x, [t]), \phi_1 \phi_2)$  жиынында  $k \rightarrow \infty$  ұмтылғанда (2.10)-(2.13) есебінің  $(\lambda^*(x), \tilde{w}^*(x, [t]))$  шешіміне жинақталады.

Келесі бағалаулар орындалады:

$$\begin{aligned} & \|\lambda^{(k+n)} - \lambda^{(k+1)}\|_2 \leq \\ & \leq \|\lambda^{(k+n)} - \lambda^{(k+n-1)}\|_2 + \|\lambda^{(k+n-1)} - \lambda^{(k+n-2)}\|_2 + \dots + \|\lambda^{(k+2)} - \lambda^{(k+1)}\|_2 \leq \\ & \leq h\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|P(x)\| \left( \|\tilde{w}^{(k+n-1)} - \tilde{w}^{(k+n-2)}\|_1 + \right. \\ & \left. + \|\tilde{w}^{(k+n-2)} - \tilde{w}^{(k+n-3)}\|_1 + \dots + \|\tilde{w}^{(k+1)} - \tilde{w}^{(k)}\|_1 \right) \leq \\ & \leq h\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|P(x)\| ([\tilde{q}(h)]^{k+n-2} + [\tilde{q}(h)]^{k+n-3} + \dots + [\tilde{q}(h)]^k) \|\tilde{w}^{(1)} - \tilde{w}^{(0)}\|_1 \leq \\ & \leq h\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|P(x)\| [\tilde{q}(h)]^k \sum_{i=0}^{n-2} [\tilde{q}(h)]^i \|\tilde{w}^{(1)} - \tilde{w}^{(0)}\|_1 \leq \\ & \leq [h\tilde{\gamma}(h)]^2 \max_{x \in [0, \omega]} \|P(x)\| \max_{x \in [0, \omega]} \|P_0(x)\| [\tilde{q}(h)]^k \sum_{i=0}^{n-2} [\tilde{q}(h)]^i \max_{x \in [0, \omega]} \|Q_h(x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot]))\|, \\ & \|\tilde{w}^{(k+n)} - \tilde{w}^{(k+1)}\|_1 \leq \\ & \leq \|\tilde{w}^{(k+n)} - \tilde{w}^{(k+n-1)}\|_1 + \|\tilde{w}^{(k+n-1)} - \tilde{w}^{(k+n-2)}\|_1 + \dots + \|\tilde{w}^{(k+2)} - \tilde{w}^{(k+1)}\|_1 \leq \\ & \leq [\tilde{q}(h)]^k \sum_{i=0}^{n-2} [\tilde{q}(h)]^i \|\tilde{w}^{(1)} - \tilde{w}^{(0)}\|_1 \leq \end{aligned}$$

$$\leq [\tilde{q}(h)]^{k+1} \sum_{i=0}^{n-2} [\tilde{q}(h)]^i h \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|P_0(x)\| \max_{x \in [0, \omega]} \|Q_h(x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot]))\|.$$

$n \rightarrow \infty$  ұмтылғанда 1-теореманың а), ә) бағалауларын аламыз.

Шешімнің оқушауланғандығын көрсетеміз. Келесі шарттар орындалатындай  $\varepsilon > 0$  санын аламыз:

$$\varepsilon \tilde{\gamma}(h) < 1, \quad \tilde{q}(h) < 1 - \varepsilon \tilde{\gamma}(h).$$

$f'_w(x, t, u, u_t, w)$  функциясының  $G_0(\phi_1, \phi_2)$  жиынында бірқалыпты үзіліссіздігінен және  $\frac{\partial Q_h(x, \lambda(x), \tilde{w}(x, [\cdot]))}{\partial \lambda}$  Якоби матрицасының құрылымынан оның  $S(\lambda^*(x), \phi_1) \times S(\tilde{w}^*(x, [t]), \phi_1 \phi_2)$  жиынында бірқалыпты үзіліссіздігі шығады. Сондықтан барлық  $x \in [0, \omega]$ ,  $(\lambda(x), \tilde{w}(x, [\cdot])) \in S(\lambda^*(x), \delta_1) \times S(\tilde{w}^*(x, [t]), \delta_1 \delta_2)$  үшін

$$\left\| \frac{\partial Q_h(x, \lambda(x), \tilde{w}(x, [\cdot]))}{\partial \lambda} - \frac{\partial Q_h(x, \hat{\lambda}(x), \tilde{w}^*(x, [\cdot]))}{\partial \lambda} \right\| < \varepsilon$$

болатындай  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$  сандары табылады. Егер  $(\lambda^*(x), \tilde{w}^*(x, [\cdot]))$  – (10)-(13) есебінің шешімі болса, онда  $Q_h(x, \lambda^*(x), \tilde{w}^*(x, [\cdot])) = 0$  екенін байқаймыз.

$\{\hat{\lambda}(x), \hat{\tilde{w}}(x, [t]) \in S(\lambda^*(x), \delta_1) \times S(\tilde{w}^*(x, [t]), \delta_1 \delta_2)$  – (10)-(13) есебінің басқа шешімі болсын.  $Q_h(x, \lambda^*(x), \tilde{w}^*(x, [\cdot])) = 0$  және  $Q_h(x, \hat{\lambda}^*(x), \hat{\tilde{w}}^*(x, [\cdot])) = 0$  болғандықтан,

$$\lambda^*(x) = \lambda^*(x) - \left\| \frac{\partial Q_h(x, \lambda(x), \tilde{w}(x, [\cdot]))}{\partial \lambda} \right\|^{-1} Q_h(x, \lambda^*(x), \tilde{w}^*(x, [\cdot])),$$

$$\hat{\lambda}^*(x) = \hat{\lambda}^*(x) - \left\| \frac{\partial Q_h(x, \lambda(x), \tilde{w}(x, [\cdot]))}{\partial \lambda} \right\|^{-1} Q_h(x, \hat{\lambda}^*(x), \hat{\tilde{w}}^*(x, [\cdot])).$$

Бұл теңдіктерден

$$\lambda^*(x) - \hat{\lambda}^*(x) = \lambda^*(x) - \hat{\lambda}^*(x) -$$

$$- \left\| \frac{\partial Q_h(x, \lambda(x), \tilde{w}(x, [\cdot]))}{\partial \lambda} \right\|^{-1} [Q_h(x, \lambda^*(x), \tilde{w}^*(x, [\cdot])) - Q_h(x, \hat{\lambda}^*(x), \hat{\tilde{w}}^*(x, [\cdot]))]$$

шығады.  $Q_h(x, \lambda^*(x), \tilde{w}^*(x, [\cdot])) - Q_h(x, \hat{\lambda}^*(x), \hat{\tilde{w}}^*(x, [\cdot]))$  айырмасына Лагранж ақырлы өсімшесі формуласын [105] қолданып

$$\lambda^*(x) - \hat{\lambda}^*(x) =$$

$$\begin{aligned}
&= - \left[ \frac{\partial Q_h(x, \lambda^*(x), \tilde{w}^*(x, [\cdot]))}{\partial \lambda} \right]^{-1} \int_0^1 \left( \frac{\partial Q_h(x, \hat{\lambda}(x) + t(\lambda^*(x) - \hat{\lambda}(x)), \tilde{w}^*(x, [\cdot]))}{\partial \lambda} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial Q_h(x, \lambda^*(x), \tilde{w}^*(x, [\cdot]))}{\partial \lambda} \right) dt [\lambda^*(x) - \hat{\lambda}^*(x)] - \\
&\quad - \left[ \frac{\partial Q_h(x, \lambda^*(x), \tilde{w}^*(x, [\cdot]))}{\partial \lambda} \right]^{-1} \left[ Q_h(x, \hat{\lambda}^*(x), \tilde{w}^*(x, [\cdot])) - Q_h(x, \hat{\lambda}^*(x), \widehat{w}^*(x, [\cdot])) \right]
\end{aligned}$$

аламыз. Бұдан

$$\begin{aligned}
\|\lambda^*(x) - \hat{\lambda}^*(x)\| &\leq \frac{\tilde{\gamma}(h)}{1 - \varepsilon \tilde{\gamma}(h)} \left\| Q_h(x, \lambda^*(x), \tilde{w}^*(x, [\cdot])) - Q_h(x, \hat{\lambda}^*(x), \widehat{w}^*(x, [\cdot])) \right\| \leq \\
&\leq h \tilde{\gamma}(h) \left( P_1 \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{w}_r^*(x, t) - \widehat{w}_r^*(x, t)\| + \right. \\
&\quad + P_2 \int_0^x \int_0^\xi e^{L_2 \frac{x^2}{2}} (L_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{w}_r^*(\xi_1, t) - \widehat{w}_r^*(\xi_1, t)\| d\xi_3 d\xi_2 + \\
&\quad + L_1 \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{w}_r^*(x, t) - \widehat{w}_r^*(x, t)\|) d\xi_1 d\xi + \\
&\quad \left. + P_3 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{w}_r^*(\xi_1, t) - \widehat{w}_r^*(\xi_1, t)\| d\xi_1 d\xi \right), \\
\|\tilde{w}_r^* - \widehat{w}_r^*\|_1 &\leq \tilde{q}(h) \|\tilde{w}_r^* - \widehat{w}_r^*\|_1
\end{aligned}$$

болғандықтан, барлық  $(x, t) \in \Omega_r$ ,  $r = \overline{1, N}$ , теңдіктері орындалады. 6-теорема дәлелденді.

$w_r^{(k)}(x, t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , функциясын келесі теңдікпен анықтаймыз:

$$w_r^{(k)}(x, t) = \begin{cases} \lambda_r^{(k)}(x) + \tilde{w}_r^{(k)}(x, t), & (x, t) \in \Omega_r, r = \overline{1, N} \\ \lambda_N^{(k)}(x) + \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{w}_N^{(k)}(x, t), & t = Nh \end{cases}$$

$$u(x, t) = \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi w(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi.$$

$S(u^{(0)}(x), \Phi(x))$ ,  $\Phi(x) = \varphi(t) + \psi(t)x + \frac{x^2}{2} \phi_1(1 + \phi_2)$  арқылы  $t$  бойынша бөліктік-үзіліссіз  $u: \Omega \rightarrow R$  функциялар жиынын белгілейміз.

$$\left\| u(x, t) - \varphi(t) - \int_0^x \int_0^\xi (\lambda^0(x) - \tilde{w}^{(0)}(\xi_1, t)) d\xi_1 d\xi \right\| < \Phi(x),$$

$$\left\| u(x, T) - \varphi(T) - \int_0^x \int_0^\xi (\lambda^0(x) - \tilde{w}^{(0)}(\xi_1, T)) d\xi_1 d\xi \right\| < \Phi(x).$$

(2.1)-(2.4) және (2.10)-(2.13) есептерінің пара-парлығынан және 6-теоремадан 7-теорема шығады.

*7-теорема.* 6-теореманың шарттары орындалсын, онда  $\{u^{(k)}(x, t)\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , функциялар тізбегі  $S(u^{(0)}(x, t), \Phi(x))$  жиынына тиісті және (2.1)-(2.4) есебінің  $u^*(x, t)$  шешіміне  $S(u^{(0)}(x, t), \Phi(x))$  жиынында жинақталады және келесі бағалау орындалады:

$$\begin{aligned} \|u^*(x, t) - u^{(k)}(x, t)\| &\leq \left( h\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|P(x)\| + \right. \\ &\left. + \tilde{q}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|P_0(x)\| \frac{[\tilde{q}(h)]^{k+1}}{1 - \tilde{q}(h)} \max_{x \in [0, \omega]} \|Q_h(x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{w}^{(0)}(x, [\cdot]))\| \right), (x, t) \in \Omega \end{aligned}$$

Сондай-ақ, (2.1)-(2.4) есебінің кез келген шешімі  $S(u^{(0)}(x, t), \Phi(x))$  жиынында оқшауланған.

### 3 ҰСЫНЫЛҒАН АЛГОРИТМДЕРДІҢ СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ТОЛҚЫНДЫҚ МОДЕЛЬДЕР ҮШІН ҚОЛДАНЫЛУЫ

#### 3.1 Бенджамин-Бона-Махони-Бюргерс теңдеуі үшін бейлокал шеттік есеп

Бенджамин-Бона-Махони және Бенджамин-Бона-Махони-Бюргерс теңдеулері физика мен қолданбалы математикада толқындық үдерістерді сипаттауда кеңінен қолданылады. Бұл екі теңдеудің қолданылу салалары ұқсас болғанымен, олардың әрқайсысының нақты физикалық жағдайларды сипаттау мүмкіндіктері әртүрлі.

$\Omega = [0, \omega] \times [0, T]$  облысында Бенджамин-Бона-Махони-Бюргерс теңдеуі үшін келесі бейлокал шеттік есеп берілсін:

$$\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + w \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}, \quad (x, t) \in \Omega \quad (3.1)$$

$$w(0, t) = \varphi(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.3)$$

$$b_1 \frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 w(x, T)}{\partial x^2} + b_3 \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} + b_4 \frac{\partial w(x, T)}{\partial t} + b_5 w(x, 0) + b_6 w(x, T) = \theta(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (3.4)$$

мұнда  $\alpha, \beta - const$ ,  $\varphi(t), \psi(t)$  функциялары  $[0, T]$  аралығында үзіліссіз дифференциалданады,  $b_j - const, j = \overline{1, 6}$ .

(3.1)-(3.4) есебінің шешімін табу үшін  $z(x, t) = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}$  функциясын енгіземіз, онда

$$w(x, t) = \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi z(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi,$$

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \varphi'(t) + \psi'(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial z(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi,$$

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = \psi(t) + \int_0^x z(\xi, t) d\xi$$

және (3.1)-(3.4) есебін келесі түрде жазамыз:

$$\frac{\partial z(x, t)}{\partial t} = \varphi'(t) + \psi'(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial z(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi - \alpha z(x, t) + \beta \left( \psi(t) + \int_0^x z(\xi, t) d\xi \right) +$$

$$+ \left( \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi z(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi \right) \left( \psi(t) + \int_0^x z(\xi, t) d\xi \right), \quad (3.5)$$

$$b_1 z(x, 0) + b_2(x) z(x, T) + b_3 \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial z(\xi_1, 0)}{\partial t} d\xi_1 d\xi +$$

$$+ b_4 \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial z(\xi_1, T)}{\partial t} d\xi_1 d\xi + b_5 \int_0^x \int_0^\xi z(\xi_1, 0) d\xi_1 d\xi +$$

$$+ b_6 \int_0^x \int_0^\xi z(\xi_1, T) d\xi_1 d\xi = \tilde{\theta}(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (3.6)$$

мұнда  $\tilde{\theta}(x) = \theta(x) + b_3(\varphi'(0) + \psi'(0)x) + b_4(\varphi'(T) + \psi'(T)x) + b_5(\varphi(0) + \psi(0)x) + b_6(\varphi(T) + \psi(T)x)$ .

$h > 0: Nh = T$  қадамы бойынша  $[0, T) = \bigcup_{r=1}^N [(r-1)h, rh)$ ,  $N = 1, 2, \dots$  бөліктеуін жүргіземіз. Бұл жағдайда  $\Omega$  облысы  $N$  бөлікке бөлінеді.  $w_r(x, t)$  арқылы  $w(x, t)$  функциясының  $\Omega_r = [0, \omega] \times [(r-1)h, rh)$ ,  $r = \overline{1, N}$ , ішкі облысындағы мәнін белгілейміз. Сонда (3.5), (3.6) есебі келесі шеттік есепке пара-пар болады:

$$\frac{\partial z_r(x, t)}{\partial t} = \varphi'(t) + \psi'(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial z_r(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi - \alpha z_r(x, t) + \beta \left( \psi(t) + \int_0^x z_r(\xi, t) d\xi \right) +$$

$$+ \left( \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi z_r(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi \right) \left( \psi(t) + \int_0^x z_r(\xi, t) d\xi \right), \quad (3.7)$$

$$b_1 z_1(x, 0) + b_2 \lim_{t \rightarrow T-0} z_N(x, t) + b_3 \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial z_1(\xi_1, 0)}{\partial t} d\xi_1 d\xi +$$

$$+ b_4 \lim_{t \rightarrow T-0} \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial z_N(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi + b_5 \int_0^x \int_0^\xi z_1(\xi_1, 0) d\xi_1 d\xi +$$

$$+ b_6 \lim_{t \rightarrow T-0} \int_0^x \int_0^\xi z_r(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi = \tilde{\theta}(x), \quad (3.8)$$

$$\lambda_s(x) + \lim_{t \rightarrow sh-0} z_s(x, t) = \lambda_{s+1}(x), \quad s = \overline{1, N-1}, \quad (3.9)$$

мұнда (3.9) – бөліктеудің ішкі сызықтарындағы функцияның үзіліссіздік шарты. (3.7)-(3.9) есебінде  $\lambda_r(x) = z_r(x, (r-1)h)$  белгілеуін енгізіп

$$\tilde{z}_r(x, t) = z_r(x, t) - \lambda_r(x), \quad r = \overline{1, N},$$

алмастыруын жасаймыз.  $\lambda_r(x)$  белгісіз функциялары бар пара-пар бастапқы шеттік есебін аламыз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{z}_r(x, t)}{\partial t} &= \varphi'(t) + \psi'(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{z}_r(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi - \\ &- \alpha \tilde{z}_r(x, t) - \alpha \lambda_r(x) + \beta \left( \psi(t) + \int_0^x \tilde{z}_r(\xi, t) d\xi + \int_0^x \lambda_r(\xi) d\xi \right) + \\ &+ \left( \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{z}_r(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r(\xi_1) d\xi_1 d\xi \right) \times \\ &\times \left( \psi(t) + \int_0^x \tilde{z}_r(\xi, t) d\xi + \int_0^x \lambda_r(\xi) d\xi \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\tilde{z}_r(x, (r-1)h) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} b_1 \lambda_1(x) + b_2 \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{z}_N(x, t) + b_2 \lambda_N(x) + b_3 \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{z}_1(\xi_1, 0)}{\partial t} d\xi_1 d\xi + \\ + b_4 \lim_{t \rightarrow T-0} \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{z}_N(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi + \\ + b_6 \int_0^x \int_0^\xi \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{z}_N(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + b_6 \int_0^x \int_0^\xi \lambda_N(\xi_1) d\xi_1 d\xi = \tilde{\theta}(x), \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\lambda_s(x) + \lim_{t \rightarrow sh-0} \tilde{z}_s(x, t) = \lambda_{s+1}(x), \quad s = \overline{1, N-1}. \quad (3.13)$$

$C(\Omega_r, R^N)$  (сәйкесінше,  $C([0, \omega], R^N)$ ) арқылы  $\Omega_r$ ,  $r = \overline{1, N}$ , облысында үзіліссіз  $\tilde{w}_r: \Omega_r \rightarrow R^N$  ( $\lambda_r: [0, \omega] \rightarrow R^N$ ) функциялар кеңістігін белгілейміз. Кеңістік нормасы:  $\|\tilde{z}\|_1 = \max_{r=\overline{1, N}} \sup_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{z}_r(x, t)\|$ ,  $\|\lambda\|_2 = \max_{r=\overline{1, N}} \sup_{x \in [0, \omega]} \|\lambda_r(x)\|$ .

(3.10), (3.11) есебі  $\lambda_r(x)$ -тің бекітілген мәндерінде интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін параметрлі Коши есебі болып табылады және келесі сызықтық емес интегралдық теңдеуге пара-пар:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_r(x, t) &= \int_{(r-1)h}^t \left( \varphi'(\tau) + \psi'(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{z}_r(\xi_1, \tau)}{\partial \tau} d\xi_1 d\xi - \right. \\ &- \alpha \tilde{z}_r(x, \tau) - \alpha \lambda_r(x) + \beta \left( \psi(\tau) + \int_0^x \tilde{z}_r(\xi, \tau) d\xi + \int_0^x \lambda_r(\xi) d\xi \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \varphi(\tau) + \psi(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{z}_r(\xi_1, \tau) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r(\xi_1) d\xi_1 d\xi \right) \times \\
& \times \left( \psi(\tau) + \int_0^x \tilde{z}_r(\xi, \tau) d\xi + \int_0^x \lambda_r(\xi) d\xi \right) d\tau. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

(3.14)-теңдеуде  $t \rightarrow rh - 0$  ұмтылғанда шекке көшіп, (3.12), (3.13)-те  $\lim_{t \rightarrow rh-0} \tilde{z}_r(x, t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow Nh-0} \frac{\partial \tilde{z}_N(x, t)}{\partial t}$ ,  $r = \overline{1, N}$ , орнына оған сәйкес белгісіз функциялар  $\lambda_r(x)$ ,  $r = \overline{1, N}$ , үшін оң жақ бөліктерін қойып және (3.12) теңдеудің екі жағын да  $h > 0$  көбейту арқылы келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{aligned}
& hb_1 \lambda_1(x) + hb_2 \left( \int_{(N-1)h}^{Nh} \left( \varphi'(\tau) + \psi'(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{z}_N(\xi_1, \tau)}{\partial t} d\xi_1 d\xi - \right. \right. \\
& \left. \left. - \alpha \tilde{z}_N(x, \tau) - \alpha \lambda_r(x) + \beta \left( \psi(\tau) + \int_0^x \tilde{z}_N(\xi, \tau) d\xi + \int_0^x \lambda_N(\xi) d\xi \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left( \varphi(\tau) + \psi(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{z}_N(\xi_1, \tau) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_N(\xi_1) d\xi_1 d\xi \right) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left( \psi(\tau) + \int_0^x \tilde{z}_N(\xi, \tau) d\xi + \int_0^x \lambda_N(\xi) d\xi \right) \right) d\tau + hb_2 \lambda_N(x) + hb_3 \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{z}_1(\xi_1, 0)}{\partial t} d\xi_1 d\xi + \right. \\
& \left. + hb_4 \lim_{t \rightarrow T-0} \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{z}_N(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi + hb_5 \int_0^x \int_0^\xi \lambda_1(\xi_1) d\xi_1 d\xi + \right. \\
& \left. + hb_6 \int_0^x \int_0^\xi \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{z}_N(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + hb_6 \int_0^x \int_0^\xi \lambda_N(\xi_1) d\xi_1 d\xi = h\bar{\theta}(x), \right. \\
& \lambda_s(x) + \int_{(s-1)h}^{sh} \left( \varphi'(\tau) + \psi'(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{z}_s(\xi_1, \tau)}{\partial \tau} d\xi_1 d\xi - \right. \\
& \left. - \alpha \tilde{z}_s(x, \tau) - \alpha \lambda_s(x) + \beta \left( \psi(\tau) + \int_0^x \tilde{z}_s(\xi, \tau) d\xi + \int_0^x \lambda_s(\xi) d\xi \right) + \right. \\
& \left. + \left( \varphi(\tau) + \psi(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{z}_s(\xi_1, \tau) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_s(\xi_1) d\xi_1 d\xi \right) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\times \left( \psi(\tau) + \int_0^x \tilde{z}_s(\xi, \tau) d\xi + \int_0^x \lambda_s(\xi) d\xi \right) d\tau = \lambda_{s+1}(x)$$

мұнда  $x \in [0, \omega]$ ,  $s = \overline{1, N-1}$ . Мұны келесі түрде жазуға болады:

$$Q_h(x, \lambda(x), \tilde{z}(x, [\cdot])) = 0. \quad (3.15)$$

$\{\lambda_r(x), \tilde{z}_r(x, t)\}$ ,  $r = \overline{1, N}$ , функциялар жүйесін табу үшін  $f$  функциясы және  $h > 0$  бөліктеу қадамы арқылы анықталатын (3.15), (3.14) теңдеулерінен тұратын тұйықталған теңдеулер жүйені аламыз.

$h > 0: Nh = T(N = 1, 2, \dots)$  қадамын және

$$\lambda^{(0)}(x) = (\lambda_1^{(0)}(x), \lambda_2^{(0)}(x), \dots, \lambda_N^{(0)}(x))' \in C([0, \omega], R^N)$$

вектор-функциясын таңдап,  $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x)$ ,  $r = \overline{1, N}$ , болған жағдайда, (3.10)-(3.13) есебінің шешімі  $\tilde{z}_r^{(0)}(x, t) \in \tilde{C}(\Omega_r, R)$ ,  $r = \overline{1, N}$ , бар болады.  $\lambda^{(0)}(x) \in C([0, \omega], R^N)$  жиынын  $G_0(f, x, h)$  деп белгілейміз, ал  $\lambda^{(0)}(x)$ -ке сәйкес (3.10)-(3.13) есебінің шешімдер жиынын  $\tilde{z}_r^{(0)}(x, [t]) = (\tilde{z}_1^{(0)}(x, t), \tilde{z}_2^{(0)}(x, t), \dots, \tilde{z}_N^{(0)}(x, t))'$  арқылы белгілейміз.

$\lambda^{(0)}(x) \in G_0(f, x, h)$  функциясын,  $\tilde{z}^{(0)}(x, [t])$  шешімін және  $\phi_1 > 0$ ,  $\phi_2 > 0$  сандарын алып, келесі жиындарды құрамыз:

$$S(\lambda^{(0)}(x), \phi_1) = \{(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_N(x))' \in C([0, \omega], R^N): \\ \|\lambda_r(x) - \lambda_r^{(0)}(x)\| < \phi_1, \quad r = \overline{1, N}\},$$

$$S(\tilde{z}^{(0)}(x, [t]), \phi_1 \phi_2) = \{(\tilde{z}_1(x, t), \tilde{z}_2(x, t), \dots, \tilde{z}_N(x, t))', \tilde{z}_r(x, t) \in C(\Omega_r, R^N): \\ \|\tilde{z}_r(x, t) - \tilde{z}_r^{(0)}(x, t)\| < \phi_1 \phi_2, (x, t) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1, N}\},$$

$$G^0(\phi_1(x), \phi_2) = \{(x, t, z): (x, t) \in \Omega,$$

$$\|z - \lambda_r^{(0)}(x) - \tilde{z}_r^{(0)}(x, t)\| < \phi_1(1 + \phi_2), (x, t) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1, N},$$

$$\|z - \lambda_N^{(0)}(x) - \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{z}_N^{(0)}(x, t)\| < \phi_1(1 + \phi_2), \quad t = T\}.$$

$U(f, l_1, l_2, x, h)$  арқылы  $(\lambda^{(0)}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [t]), w^{(0)}(x, [t]), \frac{\partial w^{(0)}(x, [t])}{\partial t}, \frac{\partial w^{(0)}(x, [t])}{\partial x}, \phi_1, \phi_2)$  функциялар жиынтығын белгілейміз. Бұл жиынтықта  $f(x, t, w, w_t, w_x, z)$  функциясы  $G^0(\phi_1, \phi_2)$  жиынында  $f'_w(x, t, w, w_t, w_x, z)$ ,  $f'_{w_x}(x, t, w, w_t, w_x, z)$  дербес туындылары бар және  $\|f'_w(x, t, w, w_t, w_x, z)\| \leq l_1$ ,  $\|f'_{w_x}(x, t, w, w_t, w_x, z)\| \leq l_2$ , мұндағы  $l_1, l_2 - const$ .

$\{\lambda_r(x), \tilde{z}_r(x, t)\}$ ,  $r = \overline{1, N}$ , жүйесі бойынша  $\{\lambda(x), \tilde{z}(x, [t])\}$  жұбын құрамыз, мұндағы  $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_N(x))'$ ,  $\tilde{z}(x, [t]) = (\tilde{z}_1(x, t), \tilde{z}_2(x, t), \dots, \tilde{z}_N(x, t))'$ .

(3.10)-(3.13) есебінің бастапқы жуықтауы ретінде  $\tilde{z}^{(0)}(x, [t])$  функциясын алып, төмендегі алгоритм бойынша тізбекті жуықтауларды құрамыз:

1-қадам.  $\tilde{z}_r(x, t) = \tilde{z}_r^{(0)}(x, t)$  деп алып, (3.10) теңдеуі мен (3.14) теңдеулер жүйесінен  $\frac{\partial \tilde{z}_r^{(1)}(x, t)}{\partial t}$ ,  $\lambda_r^{(1)}(x)$ ,  $r = \overline{1, N}$ , функцияларын табамыз. (3.13) интегралдық теңдеуден  $\tilde{z}_r^{(1)}(x, t)$ ,  $r = \overline{1, N}$ , функциясы анықталады.

Үдерісті жалғастыра отырып,  $k$ -шы қадамда  $\left\{ \frac{\partial \tilde{z}_r^{(k)}(x, t)}{\partial t}, \lambda_r^{(k)}(x), \tilde{z}_r^{(k)}(x, t) \right\}$  функциялар үштігінен тұратын жүйе алынады.

Ұсынылған алгоритмнің жүзеге асырылуы, жинақтылығы және функционалдық параметрлері бар (3.10)–(3.13) көпсіпатты шеттік есептің шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары келесі теоремада келтірілген.

*8-теорема.* Барлық  $\{x, \lambda(x), \tilde{z}(x, [\cdot])\}$  үшін  $\frac{\partial Q_h(x, \lambda(x), \tilde{z}(x, [\cdot]))}{\partial \lambda}$  Якоби матрицасының кері матрицасы болатындай  $h > 0$ :  $Nh = T$ , ( $N = 1, 2, \dots$ ) қадамы,  $(\lambda^{(0)}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [t]), \phi_1, \phi_2) \in U(f, l_1, l_2, x, h)$  бар болсын, мұндағы  $x \in [0, \omega]$ ,  $\{\lambda(x), \tilde{z}(x, [t])\} \in S(\lambda^{(0)}(x), \phi_1) \times S(\tilde{z}^{(0)}(x, [t]), \phi_1 \phi_2)$  және келесі шарттар орындалсын:

- 1)  $\left\| \left[ \frac{\partial Q_h(x, \lambda(x), \tilde{z}(x, [\cdot]))}{\partial \lambda} \right]^{-1} \right\| \leq \tilde{\gamma}(h)$ ,
- 2)  $\tilde{q}(h) = h\mu \left( \frac{\omega^2}{2} + 1 \right) < 1$ ,
- 3)  $\frac{[h\tilde{\gamma}(h)]^2}{1-\tilde{q}(h)} \max_{x \in [0, \omega]} \|p(x)\| \max_{x \in [0, \omega]} \|p_0(x)\| \max_{x \in [0, \omega]} \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot]) \right) \right\| +$   
 $+ \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot]) \right) \right\| < \phi_1$ ,
- 4)  $\frac{h}{1-\tilde{q}(h)} p_0 < \phi_2$ ,

мұнда  $\mu = \left( \beta\omega + \alpha + l_1 \frac{\omega^2}{2!} + l_2\omega \right) \left( 1 + h\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|p(x)\| \right)$ .

$$p_0(x) = \left( h e^{\frac{x^2}{2}} \left( \alpha + \beta \frac{x}{2} + l_1 \frac{x^2}{2} + l_1 \frac{x}{2} + l_2 \frac{x}{2} \right) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \alpha + \beta x + l_1 \frac{x^2}{2} + l_2 \right)$$

$$\tilde{p}_2 = p_2 e^{\frac{x^2}{2}} \left( \alpha \frac{x^2}{2!} + (\beta + l_2) \frac{x^3}{3!} + l_1 \frac{x^4}{4!} \right),$$

$$p_1 = \alpha \max\{hb_2, 1\}, p_2 = \max\{hb_2, 1\} + b_3 + b_4,$$

$$p_3 = l_1 \max\{hb_2, 1\} + b_6, p_4 = (\beta + l_2) \max\{hb_2, 1\},$$

$$\max_{x \in [0, \omega]} \|p(x)\| = \exp\{h\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{p}_2(x)\|\} \left( \max_{x \in [0, \omega]} \|p_1(x)\| + \max_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{p}_2(x)\| \right).$$

Онда осы алгоритм арқылы анықталған  $\{\lambda^{(k)}(x), \tilde{z}_r^{(k)}(x, [t])\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , тізбек  $S(\lambda^{(0)}(x), \phi_1) \times S(\tilde{z}^{(0)}(x, [t]), \phi_1 \phi_2)$  жиынында (3.10)-(3.13) есебінің шешімі

$(\lambda^*(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [t]))$  функцияларына жинақталады және келесі бағалаулар орындалады:

$$\begin{aligned} & \text{a) } \|\lambda^* - \lambda^{(k+1)}\|_2 \leq \\ & \leq [h\tilde{\gamma}(h)]^2 \max_{x \in [0, X]} \|p_0(x)\| \max_{x \in [0, X]} \|p(x)\| \frac{[\tilde{q}(h)]^k}{1 - \tilde{q}(h)} \max_{x \in [0, X]} \|Q_h(x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot]))\|, \\ & \text{ә) } \|\tilde{z}^* - \tilde{z}^{(k+1)}\|_1 \leq \\ & \leq \frac{[\tilde{q}(h)]^{k+1}}{1 - \tilde{q}(h)} h\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, X]} \|p_0(x)\| \max_{x \in [0, X]} \|Q_h(x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot]))\|. \end{aligned}$$

Сонымен бірге, (3.10)-(3.13) есебінің кез келген  $(\lambda(x), \tilde{w}(x, [t]))$  шешімі  $S(\lambda^{(0)}(x), \phi_1) \times S(\tilde{z}^{(0)}(x, [t]), \phi_1 \phi_2)$  жиынында оқшауланған.

*Дәлелдеу:*

$\frac{\partial \tilde{z}_r^{(1)}(x, t)}{\partial t}, \frac{\partial \tilde{z}_r^{(0)}(x, t)}{\partial t}, r = \overline{1, N}$ , функциялары келесі теңдеулерден анықталады:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{z}_r^{(1)}(x, t)}{\partial t} &= \varphi'(t) + \psi'(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{z}_r^{(1)}(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi - \\ &- \alpha \tilde{z}_r^{(0)}(x, t) - \alpha \lambda_r^{(1)}(x) + \beta \left( \psi(t) + \int_0^x \tilde{z}_r^{(0)}(\xi, t) d\xi + \int_0^x \lambda_r^{(1)}(\xi) d\xi \right) + \\ &+ \left( \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{z}_r^{(0)}(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r^{(1)}(\xi_1) d\xi_1 d\xi \right) \times \\ &\times \left( \psi(t) + \int_0^x \tilde{z}_r^{(0)}(\xi, t) d\xi + \int_0^x \lambda_r^{(1)}(\xi) d\xi \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{z}_r^{(0)}(x, t)}{\partial t} &= \varphi'(t) + \psi'(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{z}_r^{(0)}(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi - \\ &- \alpha \tilde{z}_r^{(0)}(x, t) - \alpha \lambda_r^{(0)}(x) + \beta \left( \psi(t) + \int_0^x \tilde{z}_r^{(0)}(\xi, t) d\xi + \int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi) d\xi \right) + \\ &+ \left( \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{z}_r^{(0)}(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r^{(0)}(\xi_1) d\xi_1 d\xi \right) \times \\ &\times \left( \psi(t) + \int_0^x \tilde{z}_r^{(0)}(\xi, t) d\xi + \int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi) d\xi \right), \end{aligned}$$

Теңдеудің екі жағын мүшелеп азайту арқылы бағалайтын болсақ, төмендегіні аламыз:

$$\begin{aligned}
& \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{z}_r^{(1)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{z}_r^{(0)}(x, t)}{\partial t} \right\| \leq \\
& \leq \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{z}_r^{(1)}(\xi_1, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{z}_r^{(0)}(\xi_1, t)}{\partial t} \right\| d\xi_1 d\xi + \\
& + \alpha \max_{r=1,N} \left\| \lambda_r^{(1)}(x) - \lambda_r^{(0)}(x) \right\| + \beta \int_0^x \max_{r=1,N} \left\| \lambda_r^{(1)}(x) - \lambda_r^{(0)}(x) \right\| d\xi + \\
& + l_1 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1,N} \left\| \lambda_r^{(1)}(\xi_1) - \lambda_r^{(0)}(\xi_1) \right\| d\xi_1 d\xi + \\
& + l_2 \int_0^x \max_{r=1,N} \left\| \lambda_r^{(1)}(x) - \lambda_r^{(0)}(x) \right\| d\xi
\end{aligned}$$

Еселі интегралдары бар сызықтық-интегралдық теңсіздікті [103, с. 58] қолданамыз:

$$\begin{aligned}
& \max_{r=1,N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{z}_r^{(1)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{z}_r^{(0)}(x, t)}{\partial t} \right\| \leq \\
& \leq e^{\frac{x^2}{2}} \left( \alpha \max_{r=1,N} \left\| \lambda_r^{(1)}(x) - \lambda_r^{(0)}(x) \right\| + \beta \int_0^x \max_{r=1,N} \left\| \lambda_r^{(1)}(x) - \lambda_r^{(0)}(x) \right\| d\xi + \right. \\
& \left. + l_1 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1,N} \left\| \lambda_r^{(1)}(\xi_1) - \lambda_r^{(0)}(\xi_1) \right\| d\xi_1 d\xi + l_2 \int_0^x \max_{r=1,N} \left\| \lambda_r^{(1)}(x) - \lambda_r^{(0)}(x) \right\| d\xi \right); \\
& \left\| \frac{\partial \tilde{z}^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{z}^{(0)}}{\partial t} \right\|_1 \leq e^{\frac{\omega^2}{2}} (\alpha + \beta\omega + l_1 \frac{\omega^2}{2} + l_2\omega) \left\| \lambda^{(2)} - \lambda^{(1)} \right\|_2 \quad (3.16)
\end{aligned}$$

$\tilde{z}_r^{(1)}(x, t)$ ,  $\tilde{z}_r^{(0)}(x, t)$ ,  $r = \overline{1, N}$ , функциялары келесі теңдеулерден анықталады:

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_r^{(1)}(x, t) = & \int_{(r-1)h}^t \left( \varphi'(\tau) + \psi'(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{z}_r^{(1)}(\xi_1, \tau)}{\partial \tau} d\xi_1 d\xi - \right. \\
& - \alpha \tilde{z}_r^{(0)}(x, \tau) - \alpha \lambda_r^{(1)}(x) + \beta \left( \psi(\tau) + \int_0^x \tilde{z}_r^{(0)}(\xi, \tau) d\xi + \int_0^x \lambda_r^{(1)}(\xi) d\xi \right) + \\
& \left. + \left( \varphi(\tau) + \psi(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{z}_r^{(0)}(\xi_1, \tau) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r^{(1)}(\xi_1) d\xi_1 d\xi \right) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \psi(\tau) + \int_0^x \tilde{z}_r^{(0)}(\xi, \tau) d\xi + \int_0^x \lambda_r^{(1)}(\xi) d\xi \right) d\tau \\
\tilde{z}_r^{(0)}(x, t) = & \int_{(r-1)h}^t \left( \varphi'(\tau) + \psi'(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{z}_r^{(0)}(\xi_1, \tau)}{\partial t} d\xi_1 d\xi - \right. \\
& - \alpha \tilde{z}_r^{(0)}(x, \tau) - \alpha \lambda_r^{(0)}(x) + \beta \left( \psi(\tau) + \int_0^x \tilde{z}_r^{(0)}(\xi, \tau) d\xi + \int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi) d\xi \right) + \\
& + \left( \varphi(\tau) + \psi(\tau)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{z}_r^{(0)}(\xi_1, \tau) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r^{(0)}(\xi_1) d\xi_1 d\xi \right) \times \\
& \times \left( \psi(t) + \int_0^x \tilde{z}_r^{(0)}(\xi, \tau) d\xi + \int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi) d\xi \right) d\tau,
\end{aligned}$$

Бұл жерде де айырымды бағалайтын болсақ, төмендегіні аламыз:

$$\begin{aligned}
& \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{z}_r^{(1)}(x, t) - \tilde{z}_r^{(0)}(x, t) \right\| \leq \\
& \leq h \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{z}_r^{(1)}(\xi_1, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{z}_r^{(0)}(\xi_1, t)}{\partial t} \right\| d\xi_1 d\xi + \\
& \quad + ah \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(1)}(\xi_1) - \lambda_r^{(0)}(\xi_1) \right\| + \\
& + \beta h \int_0^x \left\| \lambda_r^{(1)}(\xi_1) - \lambda_r^{(0)}(\xi_1) \right\| d\xi + hl_1 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(1)}(\xi_1) - \lambda_r^{(0)}(\xi_1) \right\| d\xi_1 d\xi + \\
& \quad + hl_2 \int_0^x \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(1)}(\xi) - \lambda_r^{(0)}(\xi) \right\| d\xi.
\end{aligned}$$

Сонымен,

$$\left\| \tilde{z}^{(1)} - \tilde{z}^{(0)} \right\|_1 \leq h \left( e^{\frac{\omega^2}{2}} + 1 \right) (\alpha + \beta\omega + l_1 \frac{\omega^2}{2} + l_2\omega) \left\| \lambda^{(2)} - \lambda^{(1)} \right\|_2 \quad (3.17)$$

1-теореманың 3)-теңсіздігі бойынша келесі теңсіздіктерді қанағаттандыратын  $\varepsilon_0 \gamma(h) < 1$ ,  $\frac{\tilde{\gamma}(h)}{1 - \varepsilon_0 \tilde{\gamma}(h)} \left\| Q_h(x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot])) \right\| < \phi_1$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  саны бар. Ал  $\frac{\partial Q_h(x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot]))}{\partial \lambda}$  Якоби матрицасы  $S(\lambda^{(0)}(x), \phi_1)$  облысында бірқалыпты үзіліссіз және  $\varepsilon_0 > 0$  саны үшін  $\left\| \frac{\partial Q_h(x, \lambda(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot]))}{\partial \lambda} - \frac{\partial Q_h(x, \hat{\lambda}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot]))}{\partial \lambda} \right\| < \varepsilon_0$ , болатындай  $\delta_0 \in (0, \frac{\phi_1}{2})$  саны табылады. Сондай-ақ,  $\lambda(x)$ ,  $\hat{\lambda}(x) \in S(\lambda^{(0)}(x), \phi_1)$  үшін  $\left\| \lambda(x) - \hat{\lambda}(x) \right\| < \delta_0$ ,  $x \in [0, \omega]$  теңсіздігі орындалады.

$$\sigma \geq \sigma_0 = \max \left\{ 1, \frac{\tilde{\gamma}(h)}{\delta_0} \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot]) \right) \right\| \right\}$$

санын таңдап,  $\lambda^{(1,0)}(x) = \lambda^{(0)}(x)$  итерациялық үдерісті құрамыз:

$$\begin{aligned} \lambda^{(1,m+1)}(x) &= \lambda^{(1,m)}(x) - \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{\partial Q_h \left( x, \lambda^{(1,m)}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot]) \right)}{\partial \lambda} \right]^{-1} \times \\ &\times Q_h \left( x, \lambda^{(1,m)}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot]) \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.18)$$

[104, с. 20-29] әдебиеттен алынған 1-теорема бойынша (3.18) итерациялық үдерісі  $S(\lambda^{(0)}(x), \phi_1)$  жиынында  $Q_h \left( x, \lambda(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot]) \right) = 0$  теңдеуінің оқшауланған шешімі  $\lambda^{(1)}(x)$  функциясына жинақталады және

$$\left\| \lambda_r^{(1)}(x) - \lambda_r^{(0)}(x) \right\| \leq \tilde{\gamma}(h) \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot]) \right) \right\| < \phi_1. \quad (3.19)$$

(3.19)-ды (3.17)-ге қойып келесіні аламыз:

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{z}^{(1)} - \tilde{z}^{(0)} \right\| &\leq h \left( e^{\frac{\omega^2}{2}} + 1 \right) \left( \alpha + \beta\omega + l_1 \frac{\omega^2}{2} + l_2\omega \right) \tilde{\gamma}(h) \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot]) \right) \right\| \leq \\ &\leq h \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, X]} \|p_0(x)\| \max_{x \in [0, X]} \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot]) \right) \right\|, \\ p_0(x) &= \left( e^{\frac{\omega^2}{2}} + 1 \right) \left( \alpha + \beta\omega + l_1 \frac{\omega^2}{2} + l_2\omega \right). \end{aligned}$$

$\frac{\partial \tilde{z}_r^{(1)}(x, t)}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \tilde{z}_r^{(2)}(x, t)}{\partial t}$ ,  $r = \overline{1, N}$ , функциялары келесі теңдеулерден анықталады:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{z}_r^{(1)}(x, t)}{\partial t} &= \varphi'(t) + \psi'(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{z}_r^{(1)}(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi + \\ &+ \alpha \tilde{z}_r^{(0)}(x, t) + \alpha \lambda_r^{(1)}(x) + \beta \left( \psi(t) + \int_0^x \tilde{z}_r^{(0)}(\xi, t) d\xi + \int_0^x \lambda_r^{(1)}(\xi) d\xi \right) + \\ &+ \left( \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{z}_r^{(0)}(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r^{(1)}(\xi_1) d\xi_1 d\xi \right) \times \\ &\times \left( \psi(t) + \int_0^x \tilde{z}_r^{(0)}(\xi, t) d\xi + \int_0^x \lambda_r^{(1)}(\xi) d\xi \right), \end{aligned}$$

және

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{z}_r^{(2)}(x, t)}{\partial t} &= \varphi'(t) + \psi'(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial \tilde{z}_r^{(2)}(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi + \\
&+ \alpha \tilde{z}_r^{(1)}(x, t) + \alpha \lambda_r^{(2)}(x) + \beta \left( \psi(t) + \int_0^x \tilde{z}_r^{(1)}(\xi, t) d\xi + \int_0^x \lambda_r^{(2)}(\xi) d\xi \right) + \\
&+ \left( \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi \tilde{z}_r^{(1)}(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi + \int_0^x \int_0^\xi \lambda_r^{(2)}(\xi_1) d\xi_1 d\xi \right) \times \\
&\times \left( \psi(t) + \int_0^x \tilde{z}_r^{(1)}(\xi, t) d\xi + \int_0^x \lambda_r^{(2)}(\xi) d\xi \right).
\end{aligned}$$

Келесі бағалау орынды:

$$\begin{aligned}
&\max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{z}_r^{(2)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{z}_r^{(1)}(x, t)}{\partial t} \right\| \leq \\
&\leq \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{z}_r^{(2)}(\xi_1, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{z}_r^{(1)}(\xi_1, t)}{\partial t} \right\| d\xi_1 d\xi + \\
&+ \alpha \max_{r=1, N} \left\| \tilde{z}_r^{(1)}(x) - \tilde{z}_r^{(0)}(x) \right\| + \alpha \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(2)}(x) - \lambda_r^{(1)}(x) \right\| + \\
&+ \beta \int_0^x \left\| \tilde{z}_r^{(1)}(x) - \tilde{z}_r^{(0)}(x) \right\| d\xi + \beta \int_0^x \left\| \lambda_r^{(2)}(\xi) - \lambda_r^{(1)}(\xi) \right\| d\xi + \\
&+ l_1 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{z}_r^{(1)}(\xi_1, t) - \tilde{z}_r^{(0)}(\xi_1, t) \right\| d\xi_1 d\xi + \\
&\quad + l_1 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(2)}(\xi_1) - \lambda_r^{(1)}(\xi_1) \right\| d\xi_1 d\xi + \\
&+ l_2 \int_0^x \left\| \tilde{z}_r^{(1)}(x) - \tilde{z}_r^{(0)}(x) \right\| d\xi + l_2 \int_0^x \left\| \lambda_r^{(2)}(\xi) - \lambda_r^{(1)}(\xi) \right\| d\xi.
\end{aligned}$$

Еселі интегралдары бар сызықтық-интегралдық теңсіздікті [103, с. 58] қолданып келесіні аламыз:

$$\begin{aligned}
&\max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{z}_r^{(2)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{z}_r^{(1)}(x, t)}{\partial t} \right\| \leq \\
&\leq e^{\frac{x^2}{2}} \left( \alpha \max_{r=1, N} \left\| \tilde{z}_r^{(1)}(x, t) - \tilde{z}_r^{(0)}(x, t) \right\| + \alpha \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(2)}(x) - \lambda_r^{(1)}(x) \right\| + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\beta \int_0^x \left\| \tilde{z}_r^{(1)}(\xi, t) - \tilde{z}_r^{(0)}(\xi, t) \right\| d\xi + \beta \int_0^x \left\| \lambda_r^{(2)}(\xi) - \lambda_r^{(1)}(\xi) \right\| d\xi + \\
& +l_1 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{z}_r^{(1)}(\xi_1, t) - \tilde{z}_r^{(0)}(\xi_1, t) \right\| d\xi_1 d\xi + \\
& +l_1 \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(2)}(\xi_1) - \lambda_r^{(1)}(\xi_1) \right\| d\xi_1 d\xi + \\
& +l_2 \int_0^x \left\| \tilde{z}_r^{(1)}(\xi, t) - \tilde{z}_r^{(0)}(\xi, t) \right\| d\xi + l_2 \int_0^x \left\| \lambda_r^{(2)}(\xi) - \lambda_r^{(1)}(\xi) \right\| d\xi. \tag{3.20}
\end{aligned}$$

$Q_h(x, \lambda(x), \tilde{z}^{(1)}(x, [\cdot])) = 0$  операторының құрылымынан және  $Q_h(x, \lambda^{(1)}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot])) = 0$  теңдігінен

$$\begin{aligned}
& \tilde{\gamma}(h) \left\| Q_h(x, \lambda^{(1)}(x), \tilde{z}^{(1)}(x, [\cdot])) \right\| = \\
& = \tilde{\gamma}(h) \left\| Q_h(x, \lambda^{(1)}(x), \tilde{z}^{(1)}(x, [\cdot])) - Q_h(x, \lambda^{(1)}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot])) \right\| \leq \\
& \leq h\tilde{\gamma}(h) \left( p_1(x) \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{z}_r^{(1)}(x, t) - \tilde{z}_r^{(0)}(x, t) \right\| + \right. \\
& +p_2(x) \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{z}_r^{(2)}(\xi_1, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{z}_r^{(1)}(\xi_1, t)}{\partial t} \right\| d\xi_1 d\xi + \\
& +p_3(x) \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{z}_r^{(1)}(\xi_1, t) - \tilde{z}_r^{(0)}(\xi_1, t) \right\| d\xi_1 d\xi + \\
& \left. +p_4(x) \int_0^x \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{z}_r^{(1)}(\xi, t) - \tilde{z}_r^{(0)}(\xi, t) \right\| d\xi \right) \leq \\
& \leq h\tilde{\gamma}(h) \left( p_1(x) \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{z}_r^{(1)}(x, t) - \tilde{z}_r^{(0)}(x, t) \right\| + \right. \\
& +p_2(x) \int_0^x \int_0^\xi \left( e^{\frac{\xi_1^2}{2}} \left( \alpha \max_{r=1, N} \left\| \tilde{z}_r^{(1)}(\xi_1) - \tilde{z}_r^{(0)}(\xi_1) \right\| + \alpha \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(2)}(\xi_1) - \lambda_r^{(1)}(\xi_1) \right\| \right) + \right. \\
& +\beta \int_0^{\xi_1} \left\| \tilde{z}_r^{(1)}(\xi_2) - \tilde{z}_r^{(0)}(\xi_2) \right\| d\xi_2 + \beta \int_0^{\xi_1} \left\| \lambda_r^{(2)}(\xi_2) - \lambda_r^{(1)}(\xi_2) \right\| d\xi_2 + \\
& +l_1 \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{z}_r^{(1)}(\xi_2, t) - \tilde{z}_r^{(0)}(\xi_2, t) \right\| d\xi_3 d\xi_2 + \\
& \left. +l_1 \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(2)}(\xi_3) - \lambda_r^{(1)}(\xi_3) \right\| d\xi_3 d\xi_2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + l_2 \int_0^{\xi_1} \left\| \tilde{z}_r^{(1)}(\xi_2) - \tilde{z}_r^{(0)}(\xi_2) \right\| d\xi_2 + l_2 \int_0^{\xi_1} \left\| \lambda_r^{(2)}(\xi_2) - \lambda_r^{(1)}(\xi_2) \right\| d\xi_2 \Big) d\xi_1 d\xi + \\
& + p_3(x) \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{z}_r^{(1)}(\xi_1, t) - \tilde{z}_r^{(0)}(\xi_1, t) \right\| d\xi_1 d\xi + \\
& + p_4(x) \int_0^x \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{z}_r^{(1)}(\xi, t) - \tilde{z}_r^{(0)}(\xi, t) \right\| d\xi \Big).
\end{aligned}$$

Бұдан

$$\begin{aligned}
& \left\| \lambda^{(2)} - \lambda^{(1)} \right\|_2 \leq \\
& \leq h\tilde{\gamma}(h) \exp\{h\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|p_2(x)\| e^{\frac{\omega^2}{2}} \left( \alpha \frac{\omega^2}{2!} + (\beta + l_2) \frac{\omega^3}{3!} + l_1 \frac{\omega^4}{4!} \right)\} \times \\
& \times \left( \max_{x \in [0, \omega]} \|p_1(x)\| + \max_{x \in [0, \omega]} \|p_2(x)\| e^{\frac{\omega^2}{2}} \left( \alpha \frac{\omega^2}{2!} + (\beta + l_2) \frac{\omega^3}{3!} + l_1 \frac{\omega^4}{4!} \right) \right) \left\| \tilde{z}^{(1)} - \tilde{z}^{(0)} \right\|_1 \leq \\
& \leq h\tilde{\gamma}(h) \exp\{h\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{p}_2(x)\|\} \left( \max_{x \in [0, \omega]} \|p_1(x)\| + \max_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{p}_2(x)\| \right) \left\| \tilde{z}^{(1)} - \tilde{z}^{(0)} \right\|_1 \leq \\
& \leq h\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|p(x)\| \left\| \tilde{z}^{(1)} - \tilde{z}^{(0)} \right\|_1. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

$\phi_{1,1} = \tilde{\gamma}(h) \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(1)}(x), \tilde{z}^{(1)}(x, [\cdot]) \right) \right\|$  деп алып және  $S(\lambda^{(1)}(\bar{x}), \phi_{1,1}) \in S(\lambda^{(0)}(\bar{x}), \phi_1)$  екенін көрсетеміз. Шынымен, егер

$$\left\| \lambda(x) - \lambda^{(1)}(x) \right\| < \phi_{1,1} = \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, X]} \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(1)}(x), \tilde{z}^{(1)}(x, [\cdot]) \right) \right\|$$

теңсіздігін және (3.20) мен  $\left\| \lambda^{(1)}(x) - \lambda^{(0)}(x) \right\| \leq \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, X]} \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot]) \right) \right\|$  теңсіздіктерін ескере отырып, келесіні аламыз:

$$\begin{aligned}
& \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r(x) - \lambda_r^{(0)}(x) \right\| \leq \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r(x) - \lambda_r^{(1)}(x) \right\| + \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(1)}(x) - \lambda_r^{(0)}(x) \right\| \leq \\
& \leq h\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|p(x)\| \left\| \tilde{z}^{(1)} - \tilde{z}^{(0)} \right\|_1 + \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot]) \right) \right\| < \phi_1.
\end{aligned}$$

Теореманың шартынан  $Q_h \left( x, \lambda^{(1)}(x), \tilde{z}^{(1)}(x, [\cdot]) \right)$  операторы  $S(\lambda^{(1)}(\bar{x}), \phi_{1,1})$  облысында [104 с. 20-29] жұмыстағы 1-теореманың барлық шарттарын қанағаттандырады. Сондықтан  $\lambda^{(2,0)}(x) = \lambda^{(2)}(x)$  итерациялық үдерісі:

$$\lambda^{(2,m+1)}(x) = \lambda^{(2,m)}(x) - \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{\partial Q_h \left( x, \lambda^{(2,m)}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot]) \right)}{\partial \lambda} \right]^{-1} Q_h \left( x, \lambda^{(2,m)}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot]) \right),$$

$m = 0, 1, 2, \dots$ .  $S(\lambda^{(1)}(x), \phi_{1,1})$  жиынында  $Q_h \left( x, \lambda(x), \tilde{z}^{(1)}(x, [\cdot]) \right) = 0$  теңдеуінің оқшауланған шешімі  $\lambda^{(1)}(x)$  функциясына жинақталады және

$$\left\| \lambda_r^{(2)}(x) - \lambda_r^{(1)}(x) \right\| \leq \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, X]} \left\| Q_h \left( x, \lambda^{(1)}(x), \tilde{z}^{(1)}(x, [\cdot]) \right) \right\| \quad (3.22)$$

орынды болады. (3.21)-ді (3.20)-ге қоя отырып келесіні аламыз:

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial \tilde{z}^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{z}^{(1)}}{\partial t} \right\|_1 \leq e^{\frac{\omega^2}{2l}} (\alpha + \alpha h \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|p(x)\| + \\ & + \beta \omega + \beta \omega h \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|p(x)\| + l_1 \frac{\omega^2}{2!} + l_1 \frac{\omega^2}{2!} h \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|p(x)\| + l_2 \omega + \\ & + l_2 \omega h \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|p(x)\|) \left\| \tilde{z}^{(1)} - \tilde{z}^{(0)} \right\|_1 \leq \mu e^{\frac{\omega^2}{2l}} \left\| \tilde{z}^{(1)} - \tilde{z}^{(0)} \right\|_1, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$\tilde{z}_r^{(2)}(x, t)$ ,  $\tilde{z}_r^{(1)}(x, t)$ ,  $r = \overline{1, N}$ , функцияларының айырымын келесі түрде бағалаймыз:

$$\begin{aligned} & \max_{r=\overline{1, N}} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{z}_r^{(2)}(x, t) - \tilde{z}_r^{(1)}(x, t) \right\| \leq \\ & \leq h \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=\overline{1, N}} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \frac{\partial \tilde{z}_r^{(1)}(\xi_1, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{z}_r^{(0)}(\xi_1, t)}{\partial t} \right\| d\xi_1 d\xi + \\ & + \alpha h \max_{r=\overline{1, N}} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{z}_r^{(1)}(x, t) - \tilde{z}_r^{(0)}(x, t) \right\| + \alpha h \max_{r=\overline{1, N}} \left\| \lambda_r^{(2)}(x) - \lambda_r^{(1)}(x) \right\| + \\ & + \beta h \int_0^x \left\| \tilde{z}_r^{(1)}(x) - \tilde{z}_r^{(0)}(x) \right\| d\xi + \beta h \int_0^x \left\| \lambda_r^{(2)}(\xi) - \lambda_r^{(1)}(\xi) \right\| d\xi + \\ & + l_1 h \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=\overline{1, N}} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{z}_r^{(1)}(\xi_1, t) - \tilde{z}_r^{(0)}(\xi_1, t) \right\| d\xi_1 d\xi + \\ & + l_1 h \int_0^x \int_0^\xi \max_{r=\overline{1, N}} \left\| \lambda_r^{(2)}(\xi_1) - \lambda_r^{(1)}(\xi_1) \right\| d\xi_1 d\xi + \\ & + l_2 h \int_0^x \left\| \tilde{z}_r^{(1)}(x) - \tilde{z}_r^{(0)}(x) \right\| d\xi + l_2 h \int_0^x \left\| \lambda_r^{(2)}(\xi) - \lambda_r^{(1)}(\xi) \right\| d\xi. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Бұдан

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{z}^{(2)} - \tilde{z}^{(1)}\|_1 \leq \\
& \leq \left( h\mu \frac{\omega^2}{2} + \alpha h + \alpha h^2 \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|p(x)\| + \beta h \omega + \beta h^2 \omega \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|p(x)\| + l_1 h \frac{\omega^2}{2} + \right. \\
& \left. + l_1 \frac{\omega^2}{2} h^2 \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|p(x)\| + l_2 h \omega + \omega l_2 h^2 \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|p(x)\| \right) \|\tilde{z}_r^{(1)} - \tilde{z}_r^{(0)}\|_1 \leq \\
& \leq h\mu \left( \frac{\omega^2}{2} + 1 \right) \|\tilde{z}_r^{(1)} - \tilde{z}_r^{(0)}\|_1 \leq \tilde{q}(h) \|\tilde{z}^{(1)} - \tilde{z}^{(0)}\|_1, \\
& \|\tilde{z}^{(2)} - \tilde{z}^{(1)}\|_1 \leq \tilde{q}(h) \|\tilde{z}^{(1)} - \tilde{z}^{(0)}\|_1,
\end{aligned}$$

Келесі бағалау орынды:

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{z}^{(2)} - \tilde{z}^{(0)}\|_1 \leq [1 + \tilde{q}(h)] \|\tilde{z}^{(1)} - \tilde{z}^{(0)}\|_1 \leq \\
& \leq [1 + \tilde{q}(h)] h \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|p_0(x)\| \max_{x \in [0, \omega]} \|Q_h(x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot]))\| < \phi_1 \phi_2.
\end{aligned}$$

$\{\lambda_r^{(k)}(x), \tilde{z}_r^{(k)}(x, t)\} \in S(\lambda^{(0)}(x), \phi_1) \times S(\tilde{z}^{(0)}(x, [t]), \phi_1 \phi_2)$  жұбы анықталған деп болжаймыз. Бұдан келесі бағалаулар орындалады:

$$\|\tilde{z}^{(k+1)} - \tilde{z}^{(k)}\|_1 \leq [\tilde{q}(h)]^{k-1} \|\tilde{z}^{(1)} - \tilde{z}^{(0)}\|_1, \quad (3.25)$$

$$\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|Q_h(x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot]))\| \leq h \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|p(x)\| \|\tilde{z}^{(k)} - \tilde{z}^{(k-1)}\|_1. \quad (3.26)$$

$\lambda^{(k+1)}(x)$  функционалдык параметрі бойынша  $(k+1)$ -ші жуықтауды  $Q_h(x, \lambda(x), \tilde{z}^{(k)}(x, [\cdot])) = 0$  теңдеуінен табамыз. (3.21)-ді және  $Q_h(x, \lambda^{(k)}(x), \tilde{z}^{(k)}(x, [\cdot])) = 0$  теңдеуін қолданып, келесі теңсіздіктің дұрыстығын анықтаймыз:

$$\tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|Q_h(x, \lambda^{(k)}(x), \tilde{z}^{(k)}(x, [\cdot]))\| \leq h \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|p(x)\| [\tilde{q}(h)]^{k-1} \|\tilde{z}^{(1)} - \tilde{z}^{(0)}\|_1. \quad (3.27)$$

$\phi_k = \tilde{\gamma}(h) \|Q_h(x, \lambda^{(k)}(x), \tilde{z}^{(k)}(x, [\cdot]))\|$  деп алып,  $S(\lambda^{(k)}(\bar{x}), \phi_k) \subset S(\lambda^{(0)}(\bar{x}), \phi_k)$  екенін көрсетеміз. Шынымен, (3.26)-(3.27), 3) теңсіздіктерінен

$$\begin{aligned}
& \|\lambda - \lambda^{(0)}\|_2 \leq \|\lambda - \lambda^{(k-1)}\|_2 + \|\lambda^{(k-1)} - \lambda^{(k-2)}\|_2 + \dots + \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|_2 \leq \\
& \leq \frac{h \tilde{\gamma}(h)}{1 - \tilde{q}(h)} \max_{x \in [0, \omega]} \|p(x)\| \|\tilde{z}^{(1)} - \tilde{z}^{(0)}\|_1 + \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|_2 \leq \\
& \leq h \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|p(x)\| \phi_2 + \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|Q_h(x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{z}^{(0)}(x, [\cdot]))\| < \phi_1.
\end{aligned}$$

$Q_h(x, \lambda(x), \tilde{z}^{(k)}(x, [\cdot]))$  операторы  $S(\lambda^{(k)}(x), \phi_k)$  жиынында [104 с. 20-29] мақаладағы 1-теореманың барлық шарттарын қанағаттандыратындықтан,  $Q_h(x, \lambda(x), \tilde{z}^{(k)}(x, [\cdot])) = 0$  теңдеуінің  $S(\lambda^{(k)}(x), \phi_k)$  жиынында  $\lambda^{(k)}(x)$  шешімі бар және келесі бағалау орындалады:

$$\|\lambda(x) - \lambda^{(k)}(x)\|_2 \leq \tilde{\gamma}(h) \max_{x \in [0, \omega]} \|Q_h(x, \lambda^{(k)}(x), \tilde{z}^{(k)}(x, [\cdot]))\|.$$

Теореманың а), ә) теңсіздіктері және шешімнің жалғыздығы 7-теореманың дәлелдеуіне ұқсас дәлелденеді.

$z_r^{(k)}(x, t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , функциясын келесі теңдікпен анықтаймыз:

$$z_r^{(k)}(x, t) = \begin{cases} \lambda_r^{(k)}(x) + \tilde{z}_r^{(k)}(x, t), & (x, t) \in \Omega_r, r = \overline{1, N} \\ \lambda_N^{(k)}(x) + \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{z}_N^{(k)}(x, t), & t = Nh \end{cases}$$

$$w(x, t) = \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi z(\xi_1, t) d\xi_1 d\xi.$$

$S(w^{(0)}(x), \Phi(x))$ ,  $\Phi(x) = \varphi(t) + \psi(t)x + \frac{x^2}{2} \phi_1(1 + \phi_2)$  арқылы  $t$  бойынша бөліктік-үзіліссіз  $u: \Omega \rightarrow R$  функциялар жиынын белгілейміз.

$$\left\| w(x, t) - \varphi(t) - \int_0^x \int_0^\xi (\lambda^0(x) - \tilde{z}^{(0)}(\xi_1, t)) d\xi_1 d\xi \right\| < \Phi(x),$$

$$\left\| w(x, T) - \varphi(T) - \int_0^x \int_0^\xi (\lambda^0(x) - \tilde{z}^{(0)}(\xi_1, T)) d\xi_1 d\xi \right\| < \Phi(x).$$

(3.1)-(3.4) және (3.10)-(3.13) есептерінің пара-парлығынан және 8-теоремадан 9-теорема шығады.

*9-теорема.* 8-теореманың шарттары орындалсын, онда  $\{w^{(k)}(x, t)\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , функциялар тізбегі  $S(w^{(0)}(x, t), \Phi(x))$  жиынына тиісті және (3.1)-(3.4) есебінің  $w^*(x, t)$  шешіміне  $S(w^{(0)}(x, t), \Phi(x))$  жиынында жинақталады.

Мысал 1.  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  облысында Бенджамин-Бона-Махони-Бюргерс теңдеуі үшін келесі бейлокал шеттік есеп берілсін:

$$\frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t} = \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + w \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \quad (x, t) \in \Omega$$

$$w(0, t) = -\frac{t}{t+1}, \quad t \in [0, 1],$$

$$\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = \frac{1}{t+1}, \quad t \in [0, 1],$$

$$\frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial x^2} + w(x, 0) + w(x, T) = \frac{3x-1}{2}, \quad x \in [0, 1],$$

Бұл есептің дәл шешімі:  $w(x, t) = \frac{x-t}{t+1}$ . Липшиц тұрақтыларын  $l_1 = 1$ ,  $l_2 = 1$  деп бағалаймыз. 8-теореманың шарттарын тексерейік:

$$\begin{aligned} 1) \tilde{\gamma}(h) &= \frac{1.0}{h} = 100, & 2) \tilde{q}(h) &= h\mu \left( \frac{\omega^2}{2} + 1 \right) \approx 0.595 < 1, \\ \mu &= \left( \beta\omega + \alpha + l_1 \frac{\omega^2}{2} + l_2 \omega \right) \left( 1 + h\tilde{\gamma}(h) \max_x \|p(x)\| \right) \approx 39.66, \\ \max_x \|p(x)\| &\approx 10.33, \quad \max_x |p_0(x)| \approx 2.55, \quad \max_x \|Q_h^{(0)}\| \approx 0.02 \\ 3) \frac{[h\tilde{\gamma}(h)]^2}{1-\tilde{q}(h)} \cdot 10.33 \cdot 2.55 \cdot 0.02 + 100 \cdot 0.02 &\approx 1.3006 + 2 = 3.3006 < \phi_1. \\ 4) \frac{h}{1-\tilde{q}(h)} \cdot 1 &\approx 0.0247 < \phi_2. \end{aligned}$$

8-теореманың шарттары орындалады. Демек, Бенджамин-Бона-Махони-Бюргерс сызықтық емес теңдеуі үшін бейлокал шеттік есебінің  $S(\lambda^{(0)}(t), 3.31) \times S(v^{(0)}(x, t), 0.1)$  жиынына тиісті жалғыз шешімі бар болады.

### 3.2 Бенджамин-Бона-Махони теңдеуі үшін бейлокал шеттік есеп

$\Omega = [0, \omega] \times [0, T]$  облысында Бенджамин-Бона-Махони теңдеуі үшін бейлокал шеттік есеп қарастырылады:

$$\frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t} = \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + w(x, t) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \quad (x, t) \in \Omega, \quad (3.28)$$

$$w(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega] \quad (3.29)$$

$$\delta \frac{\partial w(0, t)}{\partial t} + \gamma \frac{\partial w(\omega, t)}{\partial t} = \psi(t), \quad t \in [0, T] \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = \theta(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.31)$$

мұндағы  $\psi(t)$ ,  $\theta(t)$  функциялары  $[0, T]$  аралығында үзіліссіз-дифференциалданады,  $\varphi(x)$  функциясы  $[0, \omega]$  аралығында үзіліссіз-дифференциалданады,  $\delta, \gamma - \text{const}$ .

Бұл есеп ұзындығы  $\omega$  болатын бірөлшемді ортада, бастапқы сәтте толқынның профилі  $\varphi(x)$  арқылы берілген, Нейман типті шарты бар және екі шеттегі қозғалыс динамикасы бейлокал шарттармен өзара байланысқан Бенджамин-Бона-Махони теңдеуімен сипатталатын толқындық процестің физикалық моделі.

$C(\Omega, R)$  -  $\Omega$  облысында үзіліссіз  $w: \Omega \rightarrow R$  функциялар жиыны.

Егер барлық  $(x, t) \in \Omega$  үшін (3.28) теңдеуін және (3.29)-(3.31) шеттік шарттарын қанағаттандырса, онда  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \in C(\Omega, R)$ ,  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in C(\Omega, R)$ ,  $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \in C(\Omega, R)$ ,  $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \in C(\Omega, R)$ ,  $\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \in C(\Omega, R)$  дербес туындылары бар  $u(x, t) \in C(\Omega, R)$  функциясы (3.28)-(3.31) есебінің шешімі деп аталады.

(3.28)-(3.31) есебінің шешімін табу үшін  $w(0, t) = \lambda(t)$ ,  $\tilde{w}(x, t) = w(x, t) - \lambda(t)$  функциясын енгіземіз. Онда ізделінді есепті келесі түрде жаза аламыз:

$$\frac{\partial^3 \tilde{w}(x, t)}{\partial x^2 \partial t} = \frac{\partial \tilde{w}(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \lambda(t)}{\partial t} + [\tilde{w}(x, t) + \lambda(t)] \frac{\partial \tilde{w}(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{w}(x, t)}{\partial x},$$

$$\tilde{w}(0, t) = 0, \quad x \in [0, \omega],$$

$$\tilde{w}(x, 0) + \lambda(0) = \varphi(x), \quad \lambda(0) = \varphi(0),$$

$$\delta \frac{\partial \lambda(t)}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \tilde{w}(\omega, t)}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \lambda(t)}{\partial t} = \psi(t), \quad t \in [0, T],$$

$$\frac{\partial \tilde{w}(0, t)}{\partial x} = \theta(t), \quad t \in [0, T].$$

$v(x, t) = \frac{\partial \tilde{w}(x, t)}{\partial x}$  жаңа функциясын енгіземіз, сонда  $\tilde{w}(x, t) = \int_0^x v(\xi, t) d\xi$  және (3.28)-(3.31) есебі пара-пар (3.32)-(3.35) есебіне көшеді:

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x \partial t} = \int_0^x \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial t} d\xi + \frac{\partial \lambda(t)}{\partial t} + \left[ \int_0^x v(\xi, t) d\xi + \lambda(t) \right] v(x, t) + v(x, t), \quad (3.32)$$

$$v(x, 0) = \varphi'(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \lambda(t)}{\partial t} = \frac{\psi(t)}{\delta + \gamma} - \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \int_0^x \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} dx, \quad \lambda(0) = \varphi(0), \quad (3.34)$$

$$v(0, t) = \theta(t), \quad t \in [0, T] \quad (3.35)$$

(3.32) теңдеуінің екі жағын да  $x$  айнымалысы бойынша интегралдап және (3.35) шартын ескере отырып келесі теңдеуді аламыз:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \theta(t) + \int_0^x \left( \int_0^\xi \frac{\partial v(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 + \frac{\partial \lambda(t)}{\partial t} + \left[ \int_0^\xi v(\xi_1, t) d\xi_1 + \lambda(t) \right] v(\xi, t) + v(\xi, t) \right) d\xi. \quad (3.36)$$

Тағы да  $t$  айнымалысы бойынша интегралдап және (3.33) шартты қолданып (3.37)-теңдеуін аламыз:

$$v(x, t) = \varphi'(x) + \int_0^t \theta(\eta) d\eta + \int_0^t \left( \int_0^x \int_0^\xi \frac{\partial v(\xi_1, \eta)}{\partial \eta} d\xi_1 d\xi + \int_0^x \frac{\partial \lambda(\eta)}{\partial \eta} d\xi + \right.$$

$$+ \int_0^x \left( \int_0^\xi v(\xi_1, \eta) d\xi_1 + \lambda(\eta) \right) v(\xi, \eta) + v(\xi, \eta) d\xi \Big) d\eta. \quad (3.37)$$

Сонымен қатар, (3.34)-тен

$$\lambda(t) = \varphi(0) + \int_0^t \left( \frac{\psi(\eta)}{\delta+\gamma} - \frac{\gamma}{\delta+\gamma} \int_0^\omega \frac{\partial v(x, \eta)}{\partial \eta} dx \right) d\eta. \quad (3.38)$$

$v(x, t) = \varphi'(x)$ ,  $\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \theta'(t)$  деп алып, (3.34) пен (3.38)-ден келесіні анықтаймыз:

$$\frac{\partial \lambda^{(0)}(t)}{\partial t} = \frac{\psi(t)}{\delta+\gamma} - \frac{\gamma}{\delta+\gamma} \theta'(t) \omega = \dot{\lambda}(t), \quad \lambda^{(0)}(t) = \varphi(0) + \int_0^t \frac{\psi(\eta)}{\delta+\gamma} d\eta - \frac{\gamma}{\delta+\gamma} \theta(t) \omega = \Lambda(t).$$

$\lambda(t) = \lambda^{(0)}(t)$  деп алып, (3.36)-ны қолдана отырып

$$\frac{\partial v^{(0)}(x, t)}{\partial t} = \int_0^x \left( \frac{\partial \lambda^{(0)}(t)}{\partial t} + \left[ \int_0^\xi \varphi'(\xi_1) d\xi_1 + \lambda^{(0)}(t) \right] \varphi'(\xi) + \varphi'(\xi) \right) d\xi,$$

$$v^{(0)}(x, t) = \varphi'(x) + \int_0^t \frac{\partial v^{(0)}(x, \eta)}{\partial \eta} d\eta.$$

$\lambda^{(0)}(t)$ ,  $v^{(0)}(x, t)$  функцияларын және  $\rho_1 > 0$ ,  $\rho_2 > 0$  сандарын алып келесі жиындарды құрамыз:

$$S(\lambda^{(0)}(t), \rho_1) = \{ \lambda(t) \in C([0, T], R) : \|\lambda(t) - \lambda^{(0)}(t)\| < \rho_1 \},$$

$$S(v^{(0)}(x, t), \rho_2) = \{ v(x, t) \in C(\Omega, R) : \|v(x, t) - v^{(0)}(x, t)\| < \rho_2, \quad (x, t) \in \Omega \},$$

$$G^0(\rho_1, \rho_2) = \{ (x, t, w, v) : (x, y) \in \Omega, \left\| w(x, t) - \int_0^x v^{(0)}(\xi, t) d\xi - \lambda^{(0)}(t) \right\| < \rho_1 + \rho_2,$$

$$\|v(x, t) - v^{(0)}(x, t)\| < \rho_2 \}.$$

$U(L_1, L_2, x, t)$  арқылы  $(\lambda^{(0)}(t), v^{(0)}(x, t), \rho_1, \rho_2)$  функциялар жиынтығын белгілейміз. Бұл жиынтықта  $f(x, t, w, v)$  функциясы  $G^0(\phi_1, \phi_2)$  жиынында  $f'_w(x, t, w, v)$ ,  $f'_v(x, t, w, v)$  дербес туындылары бар және  $\|f'_w(x, t, w, v)\| \leq L_1$ ,  $\|f'_v(x, t, w, v)\| \leq L_2$ , мұндағы  $L_1, L_2 - const$ .

$\{\lambda(t), \mu(t), v(x, t)\}$  жүйесі арқылы (3.32)-(3.35) есебінің бастапқы жуықтауы ретінде  $\{\lambda^{(0)}(t), \mu^{(0)}(t), v^{(0)}(x, t)\}$  үштігін құраймыз және келесі алгоритм бойынша тізбектелген жуықтауларды құрамыз:

1-қадам.  $v(x, t) = v^{(0)}(x, t)$  деп алып, (3.34) және (3.38)-ден  $\frac{\partial \lambda^{(1)}(t)}{\partial t}$  және  $\lambda^{(1)}(t)$  анықтаймыз.  $\lambda(t) = \lambda^{(1)}(t)$  болғанда, (3.36)-теңдеуден  $\frac{\partial v^{(1)}(x, t)}{\partial t}$  табамыз.

Әрі қарай  $v^{(1)}(x, t) = \varphi'(x) + \int_0^t \frac{\partial v^{(1)}(x, \eta)}{\partial \eta} d\eta$  табамыз.

2-қадам.  $v(x, t) = v^{(1)}(x, t)$  деп алып, (3.34) және (3.38)-ден, сәйкесінше,  $\frac{\partial \lambda^{(2)}(t)}{\partial t}$  және  $\lambda^{(2)}(t)$ .  $\lambda(t) = \lambda^{(2)}(t)$  болғанда, (3.36)-теңдеуден  $\frac{\partial v^{(2)}(x, t)}{\partial t}$  табамыз.

Әрі қарай  $v^{(2)}(x, t) = \varphi'(x) + \int_0^t \frac{\partial v^{(2)}(x, \eta)}{\partial \eta} d\eta$  табамыз.

Үдерісті жалғастыра отырып,  $k$ -шы қадамда  $\left\{ \frac{\partial \lambda^{(k)}(t)}{\partial t}, \lambda^{(k)}(t), \frac{\partial v^{(k)}(x, t)}{\partial t}, v^{(k)}(x, t) \right\}$  жүйе алынады.

Ұсынылған алгоритмнің бар болуы, жинақтылығы және (3.32)-(3.35) есебінің шешімділігін келесі тұжырым қамтамасыз етеді.

10-теорема.  $(\lambda^{(0)}(t), v^{(0)}(x, t), \rho_1, \rho_2) \in U(L_1, L_2, x, t)$  бар болсын, мұндағы  $(x, t) \in \Omega$ ,  $(\lambda(t), v(x, t)) \in S(\lambda^{(0)}(t), \rho_1) \times S(v^{(0)}(x, t), \rho_2)$  және келесі шарттар орындалсын:

- 1)  $\varphi(x)$  функциясы  $[0, \omega]$  аралығында үзіліссіз-дифференциалдансын;
- 2)  $\psi(t)$  функциясы  $[0, T]$  аралығында үзіліссіз-дифференциалданады,  $\varphi(x)$  функциясы  $[0, \omega]$  аралығында үзіліссіз-дифференциалданады;
- 3)  $q = \omega \left( \frac{\omega}{2} + \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \frac{\omega}{2} + L_1 T + L_2 \frac{\omega}{2} T + L_2 \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \frac{\omega}{2} T + T \right) < 1$ ,
- 4)  $\frac{\sigma}{1 - q} \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \omega T < \rho_1, \frac{q T \sigma}{1 - q} < \rho_2$ ,

мұнда  $\alpha = \max_{t \in [0, T]} \|\alpha(t)\|, \psi = \max_{t \in [0, T]} \|\psi(t)\|, \theta = \max_{t \in [0, T]} \|\theta(t)\|$ ,

$$\dot{\Lambda} = \max_{t \in [0, T]} \|\dot{\Lambda}(t)\|, \quad \Lambda = \max_{t \in [0, T]} \|\Lambda(t)\|, \quad \Lambda(t) = \varphi(0) + \int_0^t \frac{\psi(\eta)}{\delta + \gamma} d\eta - \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \theta(t) \omega,$$

$$\sigma = \theta + \dot{\Lambda} \omega + \frac{\omega^2}{2} \max_{x \in [0, \omega]} \|\varphi(x)\| \max_{x \in [0, \omega]} \|\varphi'(x)\| + \Lambda \omega \max_{x \in [0, \omega]} \|\varphi'(x)\| + \omega \max_{x \in [0, \omega]} \|\varphi'(x)\|,$$

онда (3.34)-(3.38) Бенджамин-Бона-Махони сызықтық емес теңдеуі үшін бейлокал шеттік есебінің  $S(\lambda^{(0)}(t), \rho_1) \times S(v^{(0)}(x, t), \rho_2)$  жиынына тиісті жалғыз шешімі бар болады және келесі бағалаулар орын алады:

$$\text{a) } \|\lambda^*(t) - \lambda^{(k)}(t)\| \leq \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \omega T \sum_{i=k}^{\infty} q^i \sigma, \quad \text{ә) } \|v^*(x, t) - v^{(k)}(x, t)\| \leq T \sum_{i=k+1}^{\infty} q^i \sigma.$$

Дәлелдеуі. Алгоритмнің нөлінші қадамынан келесі бағалаулар шығады:

$$\|\lambda^{(0)}(t)\| \leq \Lambda, \quad \left\| \frac{\partial \lambda^{(0)}(t)}{\partial t} \right\| \leq \dot{\Lambda},$$

$$\left\| \frac{\partial v^{(0)}(x, t)}{\partial t} \right\| \leq \theta + \dot{\Lambda} \omega + \frac{\omega^2}{2} \max_{x \in [0, X]} \|\varphi(x)\| \max_{x \in [0, X]} \|\varphi'(x)\| + \Lambda \omega \max_{x \in [0, X]} \|\varphi'(x)\| +$$

$$+ \omega \max_{x \in [0, X]} \|\varphi'(x)\| = \sigma,$$

$$\|v^{(0)}(x, t) - \varphi'(x)\| \leq \int_0^t \left\| \frac{\partial v^{(0)}(x, \eta)}{\partial \eta} \right\| d\eta < T\sigma.$$

$v(x, t) = v^{(0)}(x, t)$  болғанда, алгоритмнің бірінші қадамында келесі бағалаулар орынды:

$$\|\lambda^{(1)}(t) - \lambda^{(0)}(t)\| \leq \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \int_0^t \int_0^\omega \left\| \frac{\partial v^{(0)}(x, \eta)}{\partial \eta} \right\| dx d\eta < \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \omega T \sigma < \rho_1,$$

$$\left\| \frac{\partial \lambda^{(1)}(t)}{\partial t} - \frac{\partial \lambda^{(0)}(t)}{\partial t} \right\| \leq \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \int_0^\omega \left\| \frac{\partial v^{(0)}(x, t)}{\partial t} \right\| dx < \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \omega \sigma,$$

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial v^{(1)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial v^{(0)}(x, t)}{\partial t} \right\| \leq \\ & \leq \int_0^x \left( \int_0^\xi \frac{\partial v(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 + \frac{\partial \lambda(t)}{\partial t} + \left[ \int_0^\xi v(\xi_1, t) d\xi_1 + \lambda(t) \right] v(\xi, t) + v(\xi, t) \right) d\xi \leq \end{aligned}$$

$$\leq \int_0^x \int_0^\xi \left\| \frac{\partial v^{(0)}(\xi_1, t)}{\partial t} \right\| d\xi_1 d\xi + \int_0^x \left\| \frac{\partial \lambda^{(1)}(t)}{\partial t} - \frac{\partial \lambda^{(0)}(t)}{\partial t} \right\| d\xi +$$

$$+ L_1 \int_0^x \|v^{(0)}(\xi, t) - \varphi'(\xi_1)\| d\xi + L_2 \int_0^x \int_0^\xi \|v^{(0)}(\xi_1, t) - \varphi'(\xi_1)\| d\xi_1 d\xi +$$

$$+ L_2 \|\lambda^{(1)}(t) - \lambda^{(0)}(t)\| \int_0^x d\xi + \int_0^x \|v^{(0)}(\xi, t) - \varphi'(\xi)\| d\xi \leq$$

$$\leq \frac{\omega^2}{2} \sigma + \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \frac{\omega^2}{2} \sigma + L_1 \omega T \sigma + L_2 \frac{\omega^2}{2} T \sigma + L_2 \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \frac{\omega^2}{2} T \sigma + \omega T \sigma \leq q\sigma,$$

$$\|v^{(1)}(x, t) - v^{(0)}(x, t)\| \leq \int_0^t \left\| \frac{\partial v^{(1)}(x, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial v^{(0)}(x, \eta)}{\partial \eta} \right\| d\eta \leq \int_0^t q\sigma d\eta < \rho_2.$$

$v(x, t) = v^{(1)}(x, t)$  болғанда, алгоритмнің екінші қадамында келесі бағалаулар орынды:

$$\|\lambda^{(2)}(t) - \lambda^{(1)}(t)\| \leq \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \int_0^t \int_0^\omega \left\| \frac{\partial v^{(1)}(x, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial v^{(0)}(x, \eta)}{\partial \eta} \right\| dx d\eta \leq \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \omega T q \sigma,$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial v^{(2)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial v^{(1)}(x, t)}{\partial t} \right\| &\leq q \max_{(x, t) \in \Omega} \left\| \frac{\partial v^{(1)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial v^{(0)}(x, t)}{\partial t} \right\| \leq \\ &\leq q^2 \max_{(x, t) \in \Omega} \left\| \frac{\partial v^{(0)}(x, t)}{\partial t} \right\| \leq q^2 \sigma, \end{aligned}$$

$$\|v^{(2)}(x, t) - v^{(1)}(x, t)\| \leq \int_0^t \left\| \frac{\partial v^{(2)}(x, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial v^{(1)}(x, \eta)}{\partial \eta} \right\| d\eta \leq Tq^2\sigma.$$

$$\begin{aligned} \|\lambda^{(2)}(t) - \lambda^{(0)}(t)\| &\leq \|\lambda^{(2)}(t) - \lambda^{(1)}(t)\| + \|\lambda^{(1)}(t) - \lambda^{(0)}(t)\| \leq \\ &\leq \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \omega T q \sigma + \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \omega T \sigma \leq \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \omega T (1 + q) \sigma < \rho_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial v^{(2)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial v^{(0)}(x, t)}{\partial t} \right\| &\leq (1 + q) \max_{(x, t) \in \Omega} \left\| \frac{\partial v^{(1)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial v^{(0)}(x, t)}{\partial t} \right\| \leq \\ &\leq (q + q^2) \max_{(x, t) \in \Omega} \left\| \frac{\partial v^{(0)}(x, t)}{\partial t} \right\| \leq (q + q^2) \sigma. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|v^{(2)}(x, t) - v^{(0)}(x, t)\| &\leq \|v^{(2)}(x, t) - v^{(1)}(x, t)\| + \|v^{(1)}(x, t) - v^{(0)}(x, t)\| \leq \\ &\leq T(q + q^2)\sigma < \rho_2. \end{aligned}$$

$v(x, t) = v^{(k)}(x, t)$  болғанда, алгоритмнің  $k+1$ -ші қадамында келесі бағалаулар орынды:

$$\|\lambda^{(k+1)}(t) - \lambda^{(k)}(t)\| \leq \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \int_0^t \int_0^X \left\| \frac{\partial v^{(k)}(x, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial v^{(k-1)}(x, \eta)}{\partial \eta} \right\| dx d\eta, \quad (3.39)$$

$$\left\| \frac{\partial \lambda^{(k+1)}(t)}{\partial t} - \frac{\partial \lambda^{(k)}(t)}{\partial t} \right\| \leq \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \int_0^X \left\| \frac{\partial v^{(k)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial v^{(k-1)}(x, t)}{\partial t} \right\| dx, \quad (3.40)$$

$$\left\| \frac{\partial v^{(k+1)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial v^{(k)}(x, t)}{\partial t} \right\| \leq q \max_{(x, t) \in \Omega} \left\| \frac{\partial v^{(k)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial v^{(k-1)}(x, t)}{\partial t} \right\|, \quad (3.41)$$

$$\|v^{(k+1)}(x, t) - v^{(k)}(x, t)\| \leq \int_0^t \left\| \frac{\partial v^{(k+1)}(x, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial v^{(k)}(x, \eta)}{\partial \eta} \right\| d\eta, \quad (3.42)$$

$$\|\lambda^{(k+1)}(t) - \lambda^{(0)}(t)\| \leq \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \omega T \sum_{i=0}^k q^i \sigma < \rho_1, \|v^{(k+1)}(x, t) - v^{(0)}(x, t)\| \leq T \sum_{i=1}^k q^i \sigma < \rho_2.$$

Осылайша, (3.39)-(3.42) және  $q < 1$  теңсіздіктерінен  $\{\lambda^k(t), v^k(x, t)\}$  тізбегі  $k \rightarrow \infty$  ұмтылғанда  $S(\lambda^{(0)}(t), \rho_1) \times S(v^{(0)}(x, t), \rho_2)$  жиынында (3.32)-(3.35) есебінің  $\{\lambda^*(t), v^*(x, t)\}$  шешіміне жинақталады. Келесі бағалаулар орынды:

$$\|\lambda^{(k+p)}(t) - \lambda^{(k)}(t)\| \leq \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \omega T \sum_{i=k}^{k+p-1} q^i \sigma, \quad \|v^{(k+p)}(x, t) - v^{(k)}(x, t)\| \leq T \sum_{i=k+1}^{k+p} q^i \sigma.$$

$p \rightarrow \infty$  ұмтылғанда 10-теореманың а), ә) бағалауларын аламыз.

Жалғыздығын дәлелдейік.  $S(\lambda^{(0)}(t), \rho_1) \times S(v^{(0)}(x, t), \rho_2)$  жиынында (3.32)-(3.35) есебінің екі шешімі  $(\lambda^*(x), v^*(x, t))$ ,  $(\lambda^{**}(x), v^{**}(x, t))$  болсын.

Барлық  $(x, t) \in \Omega$  үшін (3.39)-(3.42) есебіне ұқсас  $\lambda^{**}(t) - \lambda^*(t)$ ,  $\frac{\partial \lambda^{**}(t)}{\partial t} - \frac{\partial \lambda^*(t)}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial v^{**}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial v^*(x, t)}{\partial t}$ ,  $v^{**}(x, t) - v^*(x, t)$  айырмаларын келесідей анықтаймыз:

$$\|\lambda^{**}(t) - \lambda^*(t)\| \leq \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \int_0^t \int_0^x \left\| \frac{\partial v^{**}(x, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial v^*(x, \eta)}{\partial \eta} \right\| dx d\eta,$$

$$\left\| \frac{\partial \lambda^{**}(t)}{\partial t} - \frac{\partial \lambda^*(t)}{\partial t} \right\| \leq \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \int_0^x \left\| \frac{\partial v^{**}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial v^*(x, t)}{\partial t} \right\| dx,$$

$$\left\| \frac{\partial v^{**}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial v^*(x, t)}{\partial t} \right\| \leq q \max_{(x, t) \in \Omega} \left\| \frac{\partial v^{**}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial v^*(x, t)}{\partial t} \right\|,$$

$$\|v^{**}(x, t) - v^*(x, t)\| \leq \int_0^t \left\| \frac{\partial v^{**}(x, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial v^*(x, \eta)}{\partial \eta} \right\| d\eta.$$

Бұдан  $\lambda^{**}(x) = \lambda^*(x)$ ,  $v^{**}(x, t) = v^*(x, t)$ . 9-теорема дәлелденді.  $w^{(k)}(x, t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , функциясын келесі теңдікпен анықтаймыз:  $w^{(k)}(x, t) = \int_0^x v^{(k)}(\xi, t) d\xi + \lambda^{(k)}(t)$ .

$S(w^{(0)}(x, t), \rho_1 + \rho_2)$  арқылы үзіліссіз-дифференциалданатын  $w: \Omega \rightarrow R$  және келесі теңсіздікті қанағаттандыратын  $\|w(x, t) - \int_0^x v^{(0)}(\xi, t) d\xi - \lambda^{(0)}(t)\| < \rho_1 + \rho_2$  функциялар жиынын белгілейміз.

(3.28)-(3.31) және (3.32)-(3.35) есептерінің пара-парлығынан және 10-теоремадан 11-теорема шығады.

*11-теорема.* Егер 10-теореманың шарттары орындалса, онда  $\{w^{(k)}(x, t)\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , функциялар тізбегі  $S(w^{(0)}(x, t), \rho_1 + \rho_2)$  жиынында тиісті және (3.28)-(3.31) есебінің  $w^*(x, t)$  шешіміне  $S(w^{(0)}(x, t), \rho_1 + \rho_2)$  жиынында жинақталады және келесі бағалаулар орындалады:

$$\|w^*(x, t) - w^{(k)}(x, t)\| \leq \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \omega T \sum_{i=k}^{k+p-1} q^i \sigma + T \sum_{i=k+1}^{k+p} q^i \sigma.$$

Мысал 2.  $\Omega = [0; 0.5] \times [0; 0.5]$  облысында Бенджамин-Бона-Махони теңдеуі үшін бейлокал шеттік есеп берілсін:

$$\frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t} = \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + w(x, t) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \quad (x, t) \in \Omega,$$

$$w(x, 0) = x - 1, \quad x \in [0; 0.5],$$

$$\frac{\partial w(0, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{4(t+1)^2}, \quad t \in [0; 0.5],$$

$$\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = \frac{1}{t+1}, \quad t \in [0; 0.5].$$

Бұл есептің дәл шешімі:  $w(x, t) = \frac{x-t-1}{t+1}$ . 10-теореманың шарттарын тексерейік. Бастапқы жуықтаулар маңайында Липшиц тұрақтыларын  $L_1 \approx 1, L_2 \approx 1$  деп бағалаймыз. Сонда

$$\begin{aligned} q &= \omega \left( \frac{\omega}{2} + \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \cdot \frac{\omega}{2} + L_1 T + L_2 \frac{\omega}{2} T + L_2 \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \frac{\omega}{2} T + T \right) = \\ &= 0.5 \left( 0.25 + \frac{1}{3} \cdot 0.25 + 0.5 + 1 \cdot 0.25 \cdot 0.5 + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.25 \cdot 0.5 + 0.5 \right) = 0.75 < 1. \end{aligned}$$

Әрі қарай  $\sigma$  есептелік.

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= -1 + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{t+1} - 1 \right) - \frac{1}{6(t+1)} = -1 - \frac{1}{6} = -\frac{7}{6}, \quad \dot{\Lambda}(t) = -\frac{1}{6(t+1)^2} - \left( -\frac{1}{6(t+1)^2} \right) = 0, \\ \sigma &= 0 \cdot 0.5 + \frac{0.25}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \left( -\frac{7}{6} \right) \cdot 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 1 = 0.125 - \frac{7}{12} + 0.5 \approx 1.2083. \end{aligned}$$

Облыстардың радиустарын бағалайық:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{1-q} \cdot \frac{\gamma}{\delta + \gamma} \cdot \omega T &= \frac{1.2083}{0.25} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.25 \approx 0.4028 < \rho_1, \\ \frac{qT\sigma}{1-q} &= \frac{0.75 \cdot 0.5 \cdot 1.2083}{0.25} \approx 1.8125 < \rho_2. \end{aligned}$$

10-теореманың шарттары орындалады. Демек, Бенджамин-Бона-Махони сызықтық емес теңдеуі үшін бейлокал шеттік есебінің  $S(\lambda^{(0)}(t), 0.403) \times S(v^{(0)}(x, t), 1.813)$  жиынына тиісті жалғыз шешімі бар болады.

## ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық жұмыста сызықтық және сызықтық емес үшінші ретті псевдопараболалық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептер зерттелген.

Бұл жұмыста  $\Omega = [0, \omega] \times [0, T]$  облысында келесідей үшінші ретті псевдопараболалық (1), (2), (3), (4), (5) теңдеулер үшін әртүрлі бейлокал шарттары бар шеттік есептер қарастырылды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} &= a_1(x,t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + a_2(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \\ &+ a_3(x,t)u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \quad u(x,t) \in R, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} &= a_1(x,t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + a_2(x,t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} + \\ &+ a_3(x,t)u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \quad u(x,t) \in R, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = f\left(x, t, u(x,t), \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right), \quad (x,t) \in \Omega, \quad u(x,t) \in R, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + w(x,t) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}, \quad (x,t) \in \Omega, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + w(x,t) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}, \quad (x,t) \in \Omega = [0, \omega] \times [0, Y]. \quad (5)$$

Жүргізілген зерттеу жұмысының нәтижесінде келесідей нәтижелер алынды:

- бірінші бөлімде үшінші ретті сызықтық псевдопараболалық теңдеу үшін бейлокал шеттік есептің шешімін табу алгоритмі құрылды және оның жинақтылық шарттары алынды.

- екінші бөлімде сызықтық псевдопараболалық теңдеу үшін бейлокал шеттік есептің шешу алгоритмінің негізінде сызықтық емес үшінші ретті псевдопараболалық теңдеу үшін бейлокал шеттік есептің «оқшауланған» шешімін табу алгоритмдері құрылды.

- үшінші бөлімде көптеген ғалымдардың зерттеу нысанына айналған сызықтық емес псевдопараболалық Бенджамин-Бона-Махони және Бенджамин-Бона-Махони-Бюргерс теңдеулері үшін бейлокал шарттары бар шеттік есептер қарастырылды. Олардың шешімін табу алгоритмі құрылып, дәл және жуық шешімнің арасындағы бағалаулар алынды.

Сызықтық және сызықтық емес теңдеулер үшін шешімін табу жолы келесі кезеңдерден тұрады:

- үшінші ретті псевдопараболалық теңдеуді жаңа функционалдық ауыстырулар көмегімен бірінші ретті бейлокал шартты интегралдық-дифференциалдық теңдеуге түрлендіру жүргізілді;

-  $[0, T]$  аралығын  $h > 0$  қадамы бойынша  $N$  бөлікке бөле отырып, бейлокал шартты интегралдық-дифференциалдық теңдеулер бірінші ретті бейлокал шартты интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесіне келтірілді;

- келесі кезеңде  $\lambda_r(x) = w_r(x, (r-1)h)$  параметрін енгізіп, әр  $\Omega_r$  облыстарында бастапқы шарты  $\tilde{w}_r(x, (r-1)h) = 0$  тең болатын Коши есебіне түрлендірдік;

- сызықтық емес теңдеу үшін бейлокал шеттік есептегі ізделінді шешімі бар және жалғыз болатын облыстар құрылды;

- алынған теңдеулер жүйесінің шешімін табу үшін алгоритмдер құрылып,  $\left\{ \frac{\partial \tilde{w}_r(x,t)}{\partial t}, \lambda_r(x), \tilde{w}_r(x,t) \right\}, r = \overline{1, N}$ , үштігі табылды;

- ұсынылған алгоритмдердің жүзеге асырылуы мен жинақтылығының жеткілікті шарттары, дәл және жуық шешімдердің арасындағы бағалаулар алынып, теорема ретінде тұжырымдалды;

- теореманы дәлелдеуде функционалдық талдау элементтері, интегралдық теңдеулер теориясы және жуықтау әдісі пайдаланылды.

Алынған нәтижелер және ұсынылған зерттеу әдістері жоғары ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептерді шешуде қолданыла алады. Диссертациялық жұмыстың нәтижелері бакалавриат, магистратура және докторантура кезінде математика пәні бойынша арнайы курстарда қолданылуы мүмкін.

## ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- 1 Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ. – 1960. – Т. 24, №5. – С. 852-864.
- 2 Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967) / под ред. П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1969. – 546 с.
- 3 Баренблатт Г.И., Битов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984. – 212 с.
- 4 Исенова Ж.Ж. Математическое моделирование процесса рассоления грунта // Сейфуллинские чтения–4: матер. республ. науч.-теорет. конф. – Астана: КазАТУ, 2008. – С. 125-126.
- 5 Кочина Н.И. Вопросы регулирования уровня грунтовых вод при поливах // Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 213, №1. – С. 51-54.
- 6 Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1947. – 440 с.
- 7 Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. – 1963. – Vol. 21, №2. – P. 155-160.
- 8 Камынин Л.А. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // ЖВМ и МФ. – 1964. – Т. 4. – С. 1006-1024.
- 9 Нахушев А. М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Диф. уравнения. – 1982. – Т. 18, №1. – С. 72-81.
- 10 Водахова В.А. Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, №2. – С. 280-285.
- 11 Водахова В.А. Краевые задачи для уравнений третьего порядка смешанного псевдо-параболо-гиперболического типа: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – М., 2009. – 97 с.
- 12 Кожанов А.И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений // Вестник Самарского университета. – 2008. – №3(62). – С. 165-174.
- 13 Кожанов А.И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, №6. – С. 769-774.
- 14 Kozhanov A.I., Pinigina N.R. Boundary-Value Problems for Some Higher-Order Nonclassical Differential Equations // Mathematical notes. – 2017. – Vol. 101, №3-4. – P. 467-474.
- 15 Kozhanov A.I., Pinigina N.R. Boundary-Value Problems for Some Higher-Order Nonclassical Differential Equations // Mathematical notes. – 2017. – Vol. 101, №3-4. – P. 467-474.

16 Kozhanov A.I., Lukina G.A. Pseudoparabolic and pseudohyperbolic equations in noncylindrical time domains // *Math. Notes NEFU.* – 2019. – Vol. 26, №3. – P. 15-30.

17 Канчуков В.З. Краевые задачи для уравнений псевдопараболического и смешанного гиперболо–псевдопараболического типов и их приложения к расчету тепломассобмена в почвогрунтах // *САПР и АСПР в мелиорации: сб. науч. тр.* – Нальчик, 1983. – С. 131-138.

18 Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // *Дифференц. уравнения.* – 2004. – Т. 40, №7. – С. 887-892.

19 Жегалов В.И., Уткина Е.А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // *Известия вузов. Математика.* – 1999. – №10. – С. 73-76.

20 Utkina E.A. Boundary value problems for a third-order hyperbolic equation on the plane // *Differ. Equ.* – 2017. – Vol. 53, №6. – P. 818-824.

21 Попов Н.С. Нелокальные краевые задачи для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений: автореф. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Самара, 2000. – 20 с.

22 Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. – Бишкек: Илим, 2001. – 181 с.

23 Кожобеков К.Г. О разрешимости задач сопряжений для нелинейных уравнений в частных производных третьего порядка // *Известия Томского политехнического университета.* – 2009. – Т. 315, №2. – С. 9-12.

24 Cao Yin J., Jin Ch. A Periodic Problem of a Semilinear Pseudoparabolic Equation // *Abstract and Applied Analysis.* – 2011. – Vol. 2011, №5. – P. 1-28.

25 Аркабаев Н.К. О краевой задаче для псевдопараболических уравнений с характеристикой линии склеивания // *Вестник Жалал-Абадского государственного университета.* – 2016. – №1(32). – С. 73-77.

26 Сопуев А.С., Молдоярлов У.Д. Краевые задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка // *Приволжский научный вестник.* – 2016. – №10(62). – С. 14-19.

27 Молдоярлов У.Д. Краевые задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Ош, 2018. – 102 с.

28 Умаров Х.Г. Исследование моделей математической физики псевдопараболического типа: дис. док. физ.-мат. наук: 05.13.18. – Уфа, 2016. – 299 с.

29 Ford W., Ting T. Stability and convergence of difference approximations to pseudo-parabolic partial differential equations // *Math. Comput.* – 1973. – Vol. 27 – P. 737-743.

30 Ewing R. Numerical solution of Sobolev partial differential equations // *SIAM J. Numer. Anal.* – 1975. – Vol. 12. – P. 345-363.

31 Lin Y., Zhou Y. Solving nonlinear pseudoparabolic equations with nonlocal conditions in reproducing kernel space // *Numer. Algorithms* – 2009. – Vol. 52. – P. 173-186.

32 Chattouh A., Saoudi K., Nouar M. Rothe – Legendre pseudospectral method for a semilinear pseudoparabolic equation with nonclassical boundary condition // *Nonlinear Anal. Model. Control.* – 2022. – Vol. 27 – P. 38-53.

33 Jachimavičienė J., Sapagovas M., Štikonas A. et al. On the stability of explicit finite-difference schemes for a pseudoparabolic equation with nonlocal conditions // *Numer. Funct. Anal. Optim.* – 2009. – Vol. 30. – P. 988-1001.

34 Guezane-Lakoud A., Belakroum D. Time-discretization schema for an integrodifferential Sobolev type equation with integral conditions // *Appl. Math. Comput.* – 2012. – Vol. 218. – P. 4695-4702.

35 Beshtokov M.Kh. Boundary value problems for a loaded modified fractional-order moisture transfer equation with the Bessel operator and difference methods for their solution // *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekhanika Komp'yuternye Nauk.* – 2020. – Vol. 30. – P. 158-175.

36 Beshtokov M.Kh. A numerical method for solving the second initial-boundary value problem for a multidimensional third-order pseudoparabolic equation // *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekhanika Komp'yuternye Nauk.* – 2021. – Vol. 31. – P. 384-408.

37 Beshtokov M.Kh. Finite-difference method for solving a multidimensional pseudoparabolic equation with boundary conditions of the third kind // *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekhanika Komp'yuternye Nauk.* – 2022. – Vol. 32 – P. 502-527.

38 Jachimavičienė J. Explicit difference schemes for a pseudoparabolic equation with an integral condition // *Lietuvos matematikos rinkinys* // – 2012. – Vol. 53 – P. 36-41.

39 Ciegis R., Tumanova N. On construction and analysis of finite difference schemes for pseudoparabolic problems with nonlocal boundary conditions // *Math. Model. Anal.* – 2014. – Vol. 19. – P. 281-297.

40 Ptashnyk M. Nonlinear pseudoparabolic equations as singular limit of reaction–diffusion equations // *Applicable Analysis.* – 2006. – Vol. 85, №10. – P. 1285-1299.

41 Ptashnyk M. Degenerate quasilinear pseudoparabolic equations with memory terms and variational inequalities // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications.* – 2007. – Vol. 66, №12. – P. 2653-2675.

42 Ptashnyk M. Pseudoparabolic equations with convection // *IMA journal of applied mathematics.* – 2007. – Vol. 72, №6. – P. 912-922.

43 Ptashnyk M. Homogenization of some degenerate pseudoparabolic variational inequalities // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* – 2019. – Vol. 469, №1. – P. 44-75.

44 Huntul M. J., Khompysh K., Iqbal M. K., An inverse source problem for a pseudoparabolic equation with memory // *AIMS Mathematics.* – 2024. – Vol. 9, №6. – P. 14186-14212.

45 Khompysh K., Huntul M., Mukhambetkaliyev M. Time-dependent inverse source problems for a pseudoparabolic equation with memory // *Computers & mathematics with applications.* – 2025. – Vol. 198. – P. 239-254.

- 46 Huntul M.J., Tekin I. Inverse problem for time dependent coefficients in the higher order pseudo-parabolic equation // *Mathematical modelling and control.* – 2025. – Vol. 5, №3. – P. 236-257.
- 47 Zhou J. Blow-up of a quasi-linear pseudo-parabolic equation with critical initial energy // *Applicable analysis.* – 2025. – Vol. 105, №15. – P. 1-4.
- 48 Jhangeer A., Ibraheem F., Jamal T. et al. Investigating pseudo parabolic dynamics through phase portraits, sensitivity, chaos and soliton behavior // *Scientific reports.* – 2024. – Vol. 14, №1. – P. 15224.
- 49 Yu J., Zhang J., Nonlocal Pseudo-Parabolic Equation with Memory Term and Conical Singularity: Global Existence and Blowup // *Symmetry-basel.* – 2023. – Vol. 15, №1. – P. 122.
- 50 Dhiman N., Tamsir M., Aldwoah K.A. et al. Numerical approximation of the 3rd order pseudo-parabolic equation using collocation technique // <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-4966063/v1>. 10.11.2025.
- 51 Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.* – 1989. – Т. 29, №1. – С. 50-66.
- 52 Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. A parametrization method for solving nonlinear two–point boundary value problems // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* – 2007. – Vol. 47, №1. – P. 37-61.
- 53 Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the unique solvability of a linear two–point boundary value problem for systems of integro-differential equations // *Differential Equations.* – 2013. – Vol. 49, №9. – P. 1087-1102.
- 54 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // *J of Mathematical Analysis and Applications.* – 2013. – Vol. 402, №1. – P. 167-178.
- 55 Asanova A.T. On the unique solvability of a nonlocal boundary value problem with data on intersecting lines for systems of hyperbolic equations // *Differential Equations.* – 2009. – Vol. 45, №3. – P. 385-394.
- 56 Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. Bounded solution on a strip to a system of nonlinear hyperbolic equations with mixed derivatives // *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series.* – 2016. – Vol. 4, №84. –P. 35-45.
- 57 Assanova A.T., Kabdrakhova S.S. Modification of the Euler polygonal method for solving a semi-periodic boundary value problem for pseudo-parabolic equation of special type // *Mediterranean Journal of Mathematics.* – 2020. – Vol. 17 (4), №109. <https://doi.org/10.1007/s00009-020-01540-4>.
- 58 Assanova A.T., Iskakova N.B., Orumbayeva N.T. On the well–posedness of periodic problems for the system of hyperbolic equations with finite time delay // *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* – 2020. – Vol. 43, №2. – P. 881-902.
- 59 Ospanov M.S., Merzetkhan A. Estimates of the Solution and Its Derivatives for the Semiperiodic Boundary Problem for Pseudoparabolic Equations // *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* – 2024. – Vol. 48, №13, – P. 12801-12806.

60 Orumbayeva N.T. On An Algorithm Of Finding Periodical Boundary Value Problem For System Of The Quasi-Linear Of Hyperbolic Equations // Siberian Electronic Mathematical Reports-Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya – 2013. – Vol. 10. – P. 464-474.

61 Orumbaeva N.T On Solvability of Non-Linear Semi-Periodic Boundary-Value Problem for System of Hyperbolic Equations // Russian Mathematics. – 2016. – Vol. 60, №9. – P. 23-37.

62 Orumbayeva N.T., Keldibekova A.B. On One Solution of a Periodic Boundary-Value Problem for a Third-Order Pseudoparabolic Equation // Lobachevskii Journal of Mathematics - Kazan Federal University. – 2020. – Vol. 41, №9. – P. 1864-1872.

63 Orumbayeva N.T., Keldibekova A.B. On the solvability of the duo-periodic problem for the hyperbolic equation system with a mixed derivative // Bulletin of the Karaganda University. – 2019. – Vol. 1, №93. – P. 59-71.

64 Keldibekova A.B. Solvability of a semi-periodic boundary value problem for a third order differential equation with mixed derivative // Bulletin of the Karaganda University. – 2020. – Vol. 2, №98. – P. 84-99.

65 Orumbayeva N.T., Keldibekova A.B. On a solution of a nonlinear semi-periodic boundary value problem for a third-order pseudoparabolic equation // Kazakh Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 20, №4. – P. 119-132.

66 Orumbayeva N.T., Tokmagambetova T.D. On One Solution of the Boundary Value Problem for a Pseudohyperbolic Equation of Fourth Order// Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42, №15. – P. 3705-3714.

67 Orumbayeva N.T., Tokmagambetova T.D. On the solvability of a semiperiodic boundary value problem for a pseudohyperbolic equation// Filomat – University of Nis, Serbia – 2023. – Vol. 37, №3. – P. 925-933.

68 Orumbayeva N.T., Tokmagambetova T.D., Nurgaliyeva Zh. On the solvability of a semi-periodic boundary value problem for the nonlinear Goursat equation // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2021. – Vol. 4, №104. – P. 110-117.

69 Tokmagambetova T.D., Orumbayeva N.T. On one solution of a periodic boundary value problem for a hyperbolic equations // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2023. – Vol. 1, №109. – P. 141-155.

70 Manat A.M., Orumbayeva N.T. On one approximate solution of a nonlocal boundary value problem for the Benjamin-Bon-Mahoney equation // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2023. – Vol. 2, №110. – P. 84-92.

71 Orumbayeva N.T., Kosmakova M.T., Manat A.M. et al. Solutions of boundary value problems for loaded hyperbolic type equations // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2025. – Vol. 2, №118. – P. 177-188.

72 Manat A.M., Orumbayeva N.T. On one solution of a nonlocal boundary value problem for a nonlinear partial differential equation of the third order // J of Mathematics, Mechanics and Computer Science, – 2024 – Vol. 1, №121. – P. 65-75.

73 Orumbayeva N.T., Manat A.M., Tokmagambetova T.D. Sufficient conditions for the existence of an isolated solution to a nonlocal boundary value

problem for a nonlinear third-order pseudoparabolic equation // Filomat University of Nis, Serbia. – 2025. – Vol. 39. – P. 11811-11824.

74 Orumbayeva N.T., Tokmagambetova T.D., Manat A.M. On a one solution of a nonlocal boundary value problem for a third-order partial differential equation // Қазіргі математиканың даму тенденциясы және оны білім беруді цифрландыру жағдайында оқыту: халық. ғыл.-практ. конф. – Шымкент, 2023. – Б. 104.

75 Орумбаева Н.Т., Токмагамбетова Т.Д., Манат А.М. Об одном решении нелокальной краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка // ҚР ғылым қызметкерлері күніне арнал. Дәстүрлі халық. матем. сәуір конф. – Алматы, 2023. – Б. 98-99.

76 Orumbayeva N.T., Tokmagambetova T.D., Manat A.M. On one approximate solution of a nonlocal boundary value problem for the Benjamin-Bon-Mahony equation // Қазақ КСР ҒА корреспондент-мүшесі, Т.Бі. Амановтың туған. 100 жыл тол. арнал. «Анализ, дифференциальные уравнения и их приложения»: халықаралық ғылыми-практикалық конференция: халық. ғыл.-практ. конф. – Астана, 2023. – Б. 146-147.

77 Orumbayeva N.T., Manat A.M. On one solution of initial-boundary value problem for a nonlinear differential equation in partial derivatives of the third order // Матер. 7-ші Түркі әлемі математ. дүниежүз. конгр. – Түркістан, 2023. – Б. 99.

78 Manat A.M., Orumbayeva N.T. Solution of a nonlocal boundary value problem for a nonlinear third-order partial differential equation // ҚР ғылым қызметкерлері күніне арнал. дәстүрлі халық. матем. сәуір конф. – Алматы, 2024. – Б. 212.

79 Орумбаева Н.Т., Манат А.М., Агатаева А.А. Об одном решении нелокальной краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка // Академик Т.Д. Джураевтің туғ. 90 жыл тол. арнал. «Неклассические уравнения математической физики и их приложения»: халық. ғыл. конф. – Ташкент, 2024. – Б. 204.

80 Manat A.M., Orumbayeva N.T., Agataeva A.A. On the solution of a nonlocal boundary value problem for a pseudoparabolic equation of the third order // Proceed. internat. scient. conf. «Actual problems of applied mathematics and information technologies – Al-Khwarizmi 2024». – Ташкент, 2024. – P. 174.

81 Orumbayeva N.T., Manat A.M. On an approximate solution of a nonlocal boundary value problem for a third-order partial differential equation // Evolution Equations, Approximation and Spectral Optimization: halyk. zhazgy mектеp zhene conf. – Алматы, 2024. – Б. 29-30.

82 Орумбаева Н.Т., Манат А.М. Үшінші ретті сызықтық емес псевдопараболалық теңдеу үшін бейлокал шеттік есебінің оқшауланған шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары // Академик Е.А. Бөкетовтің 100 жыл. орай ұйымдастырылған: халық. ғыл. конф. тез. жин. – Қарағанды, 2025. – Б. 107-111.

83 Wu W., Manafian J., Ali K.K., Karakoc S.B.G., Taqi A.H., Mahmoud M.A., Numerical and analytical results of the 1D BBM equation and 2D coupled BBM-system by finite element method // Int. J. Mod. Phys. – 2022. – Vol. 36 (28).

84 Al-Khaled K., Momani S., Alawneh A., Approximate wave solutions for generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equations // Applied Mathematics and Computation. – 2005. – Vol. 171. – P. 281-292.

85 Arora G., Mittal R.C., Singh B.K. Numerical solution of BBM-Burger equation with quadratic b-spline collocation method // Journal of Engineering Science and Technology. – 2014. – Vol. 9. – P. 104-116.

86 Dehghan M., Abbaszadeh M., Mohebbi A. The numerical solution of nonlinear high dimensional generalized Benjamin- Bona-Mahony-Burgers equation via the meshless method of radial basis functions // Computer and Mathematics with Applications – 2014. – Vol. 68. – P. 212-237.

87 Chunhuan X., Honglei W. New Exact Solutions for Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Equation // Open Journal of Applied Sciences. – 2020. – Vol. 10. – P. 543-550.

88 Hajiketabi M., Abbasbandy S., Casas F. The Lie-group method based on radial basis functions for solving nonlinear high dimensional generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation in arbitrary domain // Applied Mathematics and Computation – 2018. – Vol. 321 – P. 223-243.

89 Izadi M., Samei M.E. Time accurate solution to Open Access Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation via Taylor–Boubaker series scheme // Boundary Value Problems. – 2022. – Vol. 17, №2022. – P. 1-29.

90 Kanth A.R., Deepika S. Non-polynomial spline method for one dimensional nonlinear Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation // Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2017. – Vol. 18, №3-4. – P. 277-284.

91 Korpusov M. O., Panin A.A. Local solvability and solution blowup for the Benjamin-Bona-Mahony- Burgers equation with a nonlocal boundary condition // Theoretical and Mathematical Physics. – 2013. – Vol. 175, №2. – P. 580-591.

92 Mei M. Large-time behavior of solution for generalized Benjamin-Bona-Mahony Burgers equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. – 1998. – Vol. 33. – P. 699-714.

93 Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J. Model Equations for Long Waves in Nonlinear Dispersive Systems // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. – 1972. – Vol. 272, №1220. – P. 47-78.

94 Goldstein J.A., Wichnoski B.J. On the Benjamin–Bona–Mahony equation in higher dimensions // Nonlinear Analysis. – 1980. – Vol. 4, №4. – P. 665-675.

95 Olver P.J. Euler operators and conservation laws of the BBM equation // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – 1979. – Vol. 85, №1. – P. 143-160.

96 Bona J.L., Pritchard W.G., Scott L.R. Solitary-wave interaction // Physics of Fluids. – 1980. – Vol. 23, №3. – P. 438-441.

97 Coclite G.M., Di Ruvo L. A note on convergence of the solutions of Benjamin-Bona-Mahony type equations // Nonlinear Analysis-Real World Applications – 2018. – Vol. 40 – P. 64-81.

98 Bautista G.J., Pazoto A.F. On the controllability of a Boussinesq system for two-way propagation of dispersive waves // Journal of Evolution Equations – 2019. Vol. 20, №2. – P. 607-630.

99 Guo Y.T., Wang M., Tang Y.B. Higher regularity of global attractor for a damped Benjamin-Bona-Mahony equation on  $\mathbb{R}$  // Applicable Analysis № – 2015. – Vol. 94, №9. – P. 1766-1783.

100 Calvo M.C., Schratz K. Uniformly accurate splitting schemes for the Benjamin-Bona-Mahony equation with dispersive parameter // Bit Numerical Mathematics – 2022. – Vol. 62, №4. – P. 1625-1647.

101 Khater M.M.A., Salama, S.A. Semi-analytical and numerical simulations of the modified Benjamin-Bona-Mahony model // Journal of Ocean Engineering and Science – 2022. – Vol. 7, №3. – P. 264-271.

102 Qin Y.M., Yang X.G., Liu X. Pullback Attractors for the Non-Autonomous Benjamin- Bona-Mahony Equations in  $H^{-2}$  // Acta Mathematica Scientia – 2012. Vol. 32, №4. – P. 1338-1348.

103 Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний – М.: Наука, 1976 – 152 с.

104 Джумабаев Д.С. Итерационные процессы с демпфирующими множителями и их применение // Математический журнал. – 2001. – Т. 1, №1. – С. 20-30.

105 Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.